CHƯƠNG 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

2.1. Các phương trình xuất phát

Khi nghiên cứu các hiện tượng vĩ mô trong các chất lỏng thuần nhất, người ta đã đồng nhất một thể tích vật lý vô cùng nhỏ với một điểm không gian toán học mà điểm đó thường được gọi là hạt lỏng. Và như vậy đã có một sự tương ứng giữa một không gian vật lý đa liên gồm các phân tử rời rạc với một không gian toán học liên tục. Một hạt lỏng như vậy được hiểu là một tập hợp đủ lớn các phân tử nhưng chúng chiếm một thể tích vô cùng nhỏ so với miền được nghiên cứu. Các quy luật tương ứng giữa hai không gian được thiết lập sao cho các đại lượng được xét trong không gian toán học có tính chất đủ tốt để áp dụng được các công cụ toán học mà vẫn đảm bảo tính chất vật lý cơ bản của môi trường xuất phát. Các luật cân bằng và các đại lượng được xác định cho hạt lỏng được xem là các luật và các đại lượng vi mô.

Nếu trong chất lỏng có hòa tan thêm các chất lỏng khác hoặc có hòa tan các chất rắn ở mức độ phân tử thì khi đó ta có các hỗn hợp lỏng hoặc hỗn hợp nhiều thành phần, mà các thành phần của chúng sẽ khác nhau tại các điểm khác nhau. Nước mặn có thể xem như một hỗn hợp hai thành phần. Nước có mang theo chất nhiễm bẩn là các hỗn hợp nhiều thành phần. Để nghiên cứu các môi trường không thuần nhất này cần

có sự trừu tượng hóa tiếp. Người ta thường giả thiết tại mỗi một điểm của không gian toán học có đầy đủ các thành phần của hỗn hợp và các luật vi mô đối với mỗi thành phần vẫn đúng. Sau khi đưa ra luật tương ứng giữa không gian vật lý không thuần nhất với không gian toán học thuần nhất, người ta đồng nhất chúng làm một và đôi khi không phân biệt. Theo Muller /38/, mỗi một điểm của hỗn hợp được xác định bằng một số đại lượng nhiệt động học, trong đó có mật độ ρ, vận tốc v_i, ứng suất t_{ij} , lực khối f_i; chúng được xác định như sau:

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha \quad ; \; f_i = \sum_\alpha C_\alpha f_i^\alpha \quad ; v_i = \sum_\alpha C_\alpha v_i^\alpha$$

$$t_{ij} = \sum_\alpha \left(t_{ij}^\alpha - \frac{\rho}{\rho_\alpha} p_i^\alpha p_j^\alpha \right) \qquad (2.1)$$

Trong đó ρ_α là mật độ của thành phần α. Nồng độ khối C_α và dòng động lượng p_i^α đặc trưng cho sự khuếch tán các thành phần được xác định như sau:

$$C_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho} \quad ; \; p_i^\alpha = C_\alpha (v_i^\alpha - v_i) \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \rho_{,i} + \rho \, v_{i,i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_{,i} - t_{ij,j} = \rho f_i \qquad (2.3)$$

và phương trình xác định nồng độ từng thành phần sẽ như sau:

$$\rho \frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + v_i C_{\alpha,i} + (\rho p_j^\alpha)_{,j} = \tau_\alpha \qquad (2.4)$$

Trong đó τ_α là khối lượng sản sinh do sự chuyển hóa giữa các thành phần. Hệ (2.3) giống hệ phương trình mô tả môi

trường lỏng thuần nhất, tất nhiên ý nghĩa của các đại lượng được hiểu theo (2.1), (2.2). Phương trình thứ nhất của (2.3) không chịu ảnh hưởng của chuyển động tương đối, nhưng trong phương trình thứ hai, từ (2.4) chuyển động tương đối sẽ có mặt trong t_{ij} dưới dạng ẩn.

Như vậy trong trường hợp tổng quát, để biết được chuyển động của hỗn hợp cần phải có thêm phương trình xác định dòng động lượng p_i^α . Một trong những giả thiết để xác định p_i^α là giả thiết Fick, xem rằng:

$$p_i^\alpha = - K C_{\alpha,i} \qquad (2\text{-}5)$$

Trong nhiều trường hợp p_i^α được bỏ qua, chẳng hạn p_i^α là nhỏ so với các hiện tượng khác, hoặc bản thân nó xấp xỉ bằng không như trong trường hợp tất cả các thành phần chuyển động với vận tốc xấp xỉ nhau. Với chuyển động của nước mặn hoặc nước mang chất nhiễm bẩn, các chất hòa tan trong dòng được tải bởi dòng chảy và khuếch tán phân tử rất nhỏ so với khuếch tán rối. Do môi trường là không nén được, và tuân theo luật Râynôn, bỏ qua khuếch tán phân tử, hệ phương trình mô tả chuyển động của hỗn hợp nước mặn (hoặc nước chứa chất nhiễm bẩn) có dạng:

$$V_{i,i} = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + R_{ij,j} + f_i$$

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + (C_\alpha v_i)_{,i} = -T_{i,i}^\alpha + \tau_\alpha$$

Trong đó R_{ij} là ứng xuất Rây nôn và nhớt , f_i là lực khối , p là áp suất trong dòng chảy, v_i là thành phần thứ i của vận tốc dòng chảy, C_α là nồng độ của thành phần α, $T_{i'i}^{\alpha}$ là khối lượng sản sinh do khuếch tán rối, τ_α là khối lượng của thành phần được sản sinh do các phản ứng chuyển hóa. Mật độ của nước là một trong các tính chất vật lý được nêu trong nhiều tài liệu. Một trong các quan hệ hay được sử dụng của mật độ như là quan hệ hàm với nhiệt độ, các chất lơ lửng và hòa tan là:

$$\rho = \rho_T + \Delta\rho_s + \Delta\rho_{ss}$$

Trong đó ρ là mật độ nước (kg/m^3), ρ_T là mật độ nước sạch (tinh khiết) và là hàm số của nhiệt độ, $\Delta\rho_s$, $\Delta\rho_{ss}$ là sự thay đổi của mật độ nước do các chất hòa tan và chất lơ lửng. Với nước mặn có nồng độ muối ký hiệu là C (g/kg, hay phần ngàn, ppt) thì hệ thức trên là:

$$\Delta\rho_s = (0.824493 - 4.0899*10^{-3}T + 7.6438*10^{-5}T^2 - 8.2467*10^{-7}T^3 + 5.3875*10^{-9}T^4)C + (-5.72466*10^{-3} + 1.0277*10^{-4}T - 1.6546*10^{-6}T^2)C^{1.5} + 4.8314*10^{-4}C^2$$

$$\rho_T = 999.842594 + 6.793952*10^{-2}T - 9.095290*10^{-3}T^2 + 1.001685*10^{-4}T^3 + ...$$

$$\Delta\rho_{ss} = C_{ss}(1 - \frac{1}{SG})10^{-3}$$

Trong đó C_{ss} (g/m^3) là nồng độ và SG là trọng lượng riêng của chất lơ lửng. T là nhiệt độ của nước (^{o}C). Nếu bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ, trong nhiều tài liệu đã sử dụng phương trình trạng thái sau đây:

$$\rho = 0{,}75C + 1000 \quad (kg/m^3) \qquad (2.7)$$

Các đại lượng trong (2.6) được hiểu là các đại lượng trung bình theo Rây nôn .

2.2. Hệ phương trình một chiều

Hệ phương trình (2.6) với mối liên hệ (2.7) là một hệ đầy đủ viết trong không gian ba chiều, tuy nhiên việc giải hệ này rất khó khăn về toán học và về thu thập các số liệu thực tiễn dùng cho mô phỏng, kiểm định. Vì thế trong thực tiễn, thay cho việc khảo sát trong không gian ba chiều, người ta thường đưa về khảo sát các đại lượng trung bình trong không gian một hoặc hai chiều, tùy thuộc mục đích nghiên cứu các đối tượng thực tiễn. Đối với dòng chảy trong hệ kênh sông, mô hình một chiều có nhiều ưu điểm và được phát triển mạnh. Để thu nhận hệ phương trình mô tả chuyển động một chiều có một số cách tiếp cận. Có thể xuất phát từ hệ đầy đủ (2.6) và tích phân trên diện tích ngang vuông góc với dòng chảy /14/ sau đó với một số giả thiết, đơn giản một số số hạng trong hệ phương trình thu nhận được để có hệ Saint – Venant và tải khuếch tán vẫn quen dùng. Cách làm này chặt chẽ về mặt toán học khi xuất phát, nhưng phức tạp khi diễn toán và cuối cùng vẫn phải dùng một số giả thiết để đơn giản một số số hạng trong hệ phương trình thu nhận được. Một cách tiếp cận khác mà các kỹ sư thủy lực thường dùng là dựa trên một số giả thiết, đơn giản ngay một số số hạng trong (2.6) sau đó mới tích phân trên diện tích vuông góc với dòng chảy. Cách làm này dễ hiểu nhưng vẫn chặt chẽ và đơn giản hơn trong diễn toán. Một cách tiếp cận nữa là dựa trên một số giả thiết (chẳng hạn giả thiết một chiều) viết các quy luật bảo

toàn cho một thể tích lỏng yếu tố /22/. Cách tiếp cận này đơn giản, dễ hiểu đối với các kỹ sư nhưng khó liệt kê hết các yếu tố ảnh hưởng trong quy luật bảo toàn.

2.2.1. Những giả thiết cơ bản khi thu nhận hệ phương trình một chiều

a. Dòng chảy là một chiều, tức là góc giữa véctơ vận tốc trên một thiết diện ngang so với véctơ vận tốc trung bình trên thiết diện là nhỏ, hoặc vận tốc là gần đều trên toàn thiết diện, mực nước trên thiết diện là nằm ngang (theo /25/ giả thiết này sử dụng được khi các góc lệch của véctơ vận tốc không quá 20^0).

b. Độ cong của đường dòng là nhỏ để bỏ qua gia tốc hướng tâm. Gia tốc thẳng đứng được bỏ qua so với gia tốc trọng trường, hay áp lực trong dòng chảy là thủy tĩnh.

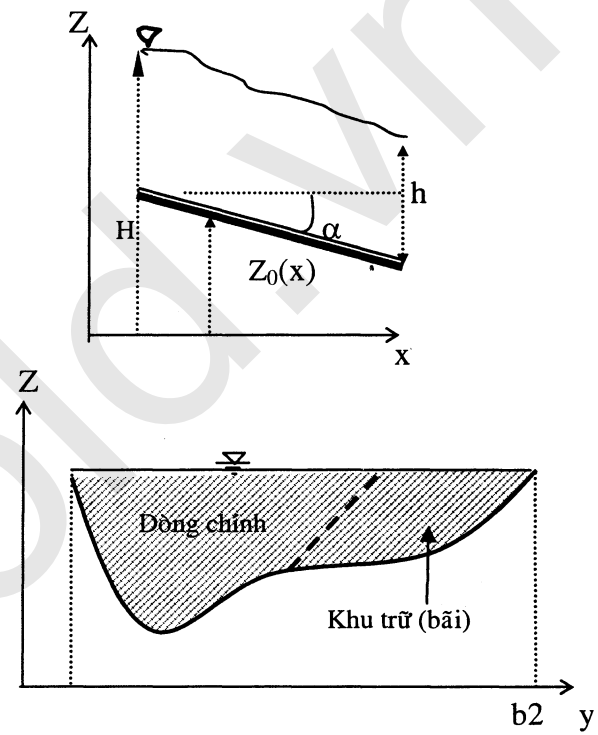
c. Độ dốc của đáy là nhỏ.

d. Luật cản ở mặt và đáy giống luật cản đối với dòng dừng.

e. Vật chất hòa tan được xáo trộn đều.

2.2.2. Phương trình cơ bản của dòng một chiều

Xét một thiết diện vuông góc với dòng chảy với các ký hiệu như hình 1:



Hình 1:

Sử dụng các giả thiết nêu trong 2.2.1, tích phân hệ phương trình (2.6) trên thiết diện ngang trong Hình 1, với các lưu ý sau:

✧ Ký hiệu

$$u(x,t) = \frac{1}{A}\int_A v_1(x,y,z,t)dA \quad ; \quad Q = u.A \quad ; \quad B_\alpha = \frac{1}{A}\int_A C_\alpha dA$$

Các luật thực nghiệm về sức cản trên mặt và đáy cho công thức:

$$\int_{b1}^{b2} R_{13}\big|_{z=H}\, dy = BL_1 W^2 \cos\psi$$

Trong đó L_1 là hệ số không thứ nguyên và là hàm của vận tốc gió W, ψ là góc của vận tốc gió với trục x.

$$\int_{b1}^{b2} R_{13}\big|_{z=z_0}\, dy = gAS_f$$

Trong đó luật Chézy cho $Q = CA\,(RS_f)^{1/2}$ với C là hệ số Chézy, R là bán kính thủy lực, S_f thường được gọi là độ dốc ma sát.

✧ *Do xáo trộn đều coi $\rho = \rho(x,t)$; từ luật thủy tĩnh ta có:*

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g}{\rho}(H - z)\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Ký hiệu

$$d = \frac{1}{A}\int_{Z}^{H} B(H - z)dz$$

Như vậy d là khoảng cách từ mặt tự do tới tâm thiết diện nằm ngang; với B = constant (mặt cắt chữ nhật) thì $d = (H - z_0)/2$; z_0 là cao trình đáy.

✧ *Bỏ qua R_{11}, R_{12} (chỉ số 1, 2, 3 tương ứng với x, y, z) các đại lượng này, khi lấy trung bình, sẽ có biểu thức mà thường gọi là phần nhớt xoáy.*

Với những lưu ý trên, sau khi tích phân hệ (2.6) trên mặt cắt

ngang trong hình 1 ta sẽ được hệ phương trình sau đây:

$$B\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial H}{\partial x} + gAS_f + gA\frac{d}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = BL_1W^2\cos\psi \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial A_t S_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q S_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_t D\frac{\partial S_\alpha}{\partial x}\right) + G(S_\alpha) \qquad (2.10)$$

Trong đó A là diện tích chảy còn A_t là diện tích toàn bộ mặt cắt ngang, q là lưu lượng bổ sung hoặc mất đi dọc dòng chảy được tính trên một đơn vị chiều dài. $G(S_\alpha)$ là nguồn bổ xung hoặc mất đi thành phần α do các nguyên nhân khác nhau. β là hệ số hiệu hiệu chỉnh động lượng có giá trị xấp xỉ 1, trong tính toán đôi khi xem $\beta = 1$ do cách lấy mặt cắt trung bình A.

Trong bài toán nhiễm mặn, nồng độ muối ký hiệu là S, nếu q là nguồn bổ xung nước mặn có nồng độ S_q ($q > 0$) và không có quá trình chuyển hóa mặn nào thì $G(S) = qS_q$; q là nguồn nước lấy đi dọc dòng chảy ($q < 0$) thì $G(S) = qS$.

Trong bài toán lan truyền BOD với nồng độ S_B và nguồn bổ sung với lưu lượng q có nồng độ S_q thì:

$$G(S_B) = -(K_1 + K_3)A.S_B + A.L + qS_q.$$

Với K_1, K_3 là hằng số liên quan tới quá trình chuyển hóa; L là tốc độ thải BOD dọc dòng chảy, A là diện tích mặt cắt ngang dòng chảy.

Trong bài toán lan truyền DO với nồng độ S_D, nguồn bổ xung lưu lượng q có nồng độ S_q ; S_a là nồng độ ôxy bão hòa; D_a

là tốc độ chuyển hóa ôxy và K_2 là hằng số liên quan tới quá trình chuyển hóa ôxy (quá trình thấm ôxy từ không khí) thì :

$$G(S_D) = -K_1.A.S_D + K_2.A\,(S_a - S_D) - D_a.A + qS_q$$

Số hạng thứ 5 trong (2.9) cho tác động của quá trình truyền chất lên quá trình thủy lực. Sự có mặt của số hạng này làm cho việc giải hệ (2.8) và (2.10) thêm khó khăn vì phải giải đồng thời hệ ba phương trình. So sánh cỡ lớn của số hạng thứ 3 và thứ 5 trong (2.9) ta có:

$$a = \frac{\frac{d}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial x}} \approx \frac{d}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta H}$$

Trong dòng chảy $\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx 10^{-3}$, $\frac{d}{\Delta H} \approx 10^{1}$, do đó $a \approx 10^{-2}$

Vì thế với sai số của các đo đạc trong thực tế có thể bỏ qua số hạng $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ so với số hạng $\frac{\partial H}{\partial x}$.

Đối với các bài toán trong kênh sông, kích thước ngang thường rất nhỏ so với kích thước dọc và vì thế thường bỏ qua ảnh hưởng của gió. Yếu tố này thường được xét ở các vùng cửa sông.

Với những nhận xét nêu trên bài toán lan truyền mặn trong khuôn khổ mô hình một chiều, đưa về hai hệ phương trình riêng rẽ sau đây:

✧ Hệ phương trình Saint – Venant một chiều mô tả quá trình thủy lực:

$$B\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f\right) = 0 \qquad (2.12)$$

✧ Phương trình tải khuếch tán mô tả quá trình lan truyền mặn:

$$\frac{\partial A_t S}{\partial t} + \frac{\partial QS}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_t D\frac{\partial S}{\partial x}\right) + G(S) \qquad (2.13)$$

Trong đó: $G(S) = qS$ nếu $q < 0$, và $G(S) = qS_q$ nếu $q > 0$. Chú ý rằng (2.13) có thể biến đổi về dạng thuận tiện khi giải số sau đây:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{Q}{A_t}(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial x} = D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S)$$ trong đó μ là hệ số hiệu chỉnh.

Nếu dùng biến tính toán là lưu tốc u(x,t) và độ sâu h(x,t) thì hệ (2.11) và (2.12) còn được viết dưới dạng:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{B}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h = Cont} = \frac{q}{B} \qquad (2.11)'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_o) = 0 \qquad (2.12)'$$

Trong đó A = A(h) ; B = B(h) ; $S_0 = \frac{-\partial z_0}{\partial x}$ là độ nghiêng của đáy. (2.11) và (2.12) còn được viết cho các cặp hàm khác nhau, tùy thuộc mục đích sử dụng /22/.

(2.11) và (2.12) là hệ phương trình hyperbol á tuyến tính có hai họ đặc trưng tương ứng với phương trình:

$$\frac{dx}{dt} = u + \varepsilon V \qquad (2.14)$$

với $\varepsilon = \pm 1$; $V = (gA/B)^{1/2}$ và một trong các hệ thức đặc trưng có dạng:

$$\frac{dQ}{dt} - B(u + \varepsilon V)\frac{dH}{dt} = q(u \pm \varepsilon V) - gAS_f + \left(\frac{Q}{A}\right)^2_{H=cont} \qquad (2.15)$$

Hệ (2.11)' và (2.12)' còn được viết ở dạng chính tắc sau đây:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) J_1 = E_1 \qquad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) J_2 = E_2 \qquad (2.17)$$

trong đó $\lambda_1 = u + V$; $\lambda_2 = V - u$; $J_1 = u + 2V$; $J_2 = u - 2V$. trong chế độ chảy êm ({u | < V) $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 > 0$; (2.16) và (2.17) được sử dụng để xem xét điều kiện biên.

2.2.3. Điều kiện biên và điều kiện ban đầu cho sông đơn

Hệ (2.11) và (2.12) là hyperbol á tuyến tính còn (2.13) là phương trình parabol. Hai hệ này được giải riêng biệt, vì thế sẽ xét riêng cho điều kiện biên và điều kiện ban đầu cho từng hệ

trong miền $x \in [0, L]$ và $t \geq 0$.

a. Điều kiện cho (2.11) – (2.12)

Theo /13/, số điều kiện cần cho trên mỗi biên bằng số đặc trưng xuất phát từ biên đi vào miền đang xét.

Tại t = 0 ($x \in [0, L]$) cả hai họ đặc trưng (2.14) đều đi vào miền đang xét, vì thế tại mỗi điểm trên trục t = 0 đều phải cho hai điều kiện, chẳng hạn Q(x,0); H(x, 0) mà ta thường gọi là điều kiện đầu. Khi |u| < V (chế độ chảy êm) tại đầu x = 0 và x = L chỉ có một họ đi vào miền vì thế tại mỗi đầu biên phải cho một điều kiện. Trong thực tiễn thường cho Q(0, t) hoặc H (0, t) hoặc quan hệ Q(H) ; với đầu x = L cũng vậy. Khi |u| > V (chế độ chảy xiết), tùy theo chiều dòng chảy, trên biên có cả hai họ đặc trưng đi vào miền và tại đó sẽ phải cho hai điều kiện. Ta quan tâm tới trường hợp |u| < V nên không xét kỹ trường hợp chảy xiết này.

b. Việc cho riêng Q hoặc riêng H tại một biên

Trong thực tiễn, tại thượng lưu (x = 0) thường cho Q(0, t) hoặc quan hệ Q(H) , còn tại hạ lưu (x = L), đối với vùng triều, thường cho biểu đồ H (L, t). Ta sẽ xem xét về khía cạnh toán học việc cho điều kiện biên này.

Như đã chỉ ra trong /9/ để (2.16) và (2.17) có nghiệm duy nhất thì các hàm J_1 và J_2 thỏa mãn điều kiện biên:

$$J_1 = \alpha_0 J_2 + \psi_0(t) \quad \text{tại } x = 0$$

$$J_2 = \alpha_1 J_1 + \psi_1(t) \quad \text{tại } x = L \qquad (2.18)$$

phải thỏa mãn điều kiện tiêu tán sau đây:

$$-\lambda_2 J_2^2 + \lambda_1 J_1^2 \le 0 \quad \text{tại } x = 0 \qquad (2.19)$$

$$-\lambda_1 J_1^2 + \lambda_2 J_2^2 \le 0 \quad \text{tại } x = L \qquad (2.20)$$

bằng phép đổi biến : $J_1 = x_1 + \psi_0(t)$; $J_2 = x_2$, có thể đưa (2.16) và (2.17) về dạng tương tự chỉ khác vế phải; điều kiện biên (2.18) sẽ trở thành:

$$x_1 = \alpha_0 x_2 \text{ tại } x = 0$$
$$x_2 = \alpha_1 x_1 + \psi_2(t) \text{ tại } x = L . \qquad (2.21)$$

và các điều kiện phân tán tương ứng vẫn là:

$$-\lambda_2 x_2^2 + \lambda_1 x_1^2 \le 0 \quad \text{tại } x = 0 \qquad (2.19)'$$

$$-\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \le 0 \quad \text{tại } x = L \qquad (2.20)'$$

Xét điều kiện tại x = 0:

Từ phương trình đầu của (2.21) và (2.19)' ta suy ra điều kiện sau đây cho α_0:

$$\alpha_0^2 \lambda_1 - \lambda_2 \le 0$$

Hoặc thay các biểu thức của λ_1 và λ_2 ta có :

$$u \le \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} V \qquad (2.22)$$

Như vậy điều kiện biên tại x = 0 được cho sao cho α_0 thỏa mãn (2.22) thì ta sẽ có điều kiện tiêu tán và bài toán đối với x_1 và x_2 có nghiệm duy nhất.

Phương trình đầu của (2.18) cho:

$$u(1 - \alpha_0) = -2V(1 + \alpha_0) + \psi_0(t) \qquad (2.23)$$

Từ (2.23):

Nếu $\alpha_0 = 1$, có nghĩa là cho $V = \frac{1}{4}\psi_0(t)$

hay $$h = \frac{1}{16g}\psi_0^2(t)$$

Như vậy nếu $\alpha_0 = -1$ có nghĩa là cho $u = \frac{1}{2}\psi_0(t)$

Ngoài hai trường hợp này (2.23) có nghĩa là tại biên cho quan hệ u(h).

Với $\alpha_0 = \pm 1$, bất đẳng thức (2.22) trở thành:

$$u \le 0 \qquad (2.24)$$

Như vậy nếu tại biên x = 0 ta cho riêng rẽ hoặc h hoặc u, thì điều kiện tiêu tán chỉ thỏa mãn khi dòng chảy từ miền ra biên. Khi dòng chảy từ biên vào miền, điều kiện biên (2.23) chỉ thỏa mãn (2.22) nếu α_0 và ψ_0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{2(1+\alpha_0)}{\alpha_0 - 1} + \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0^2 + 1}\right)V + \frac{\psi_0(t)}{\alpha_0 - 1} \le 0$$

Cũng lý luận tương tự đối với điều kiện biên tại x = L, ta có thể thấy khi dòng chảy ra khỏi miền đang xét, tại biên có thể cho hoặc h (độ sâu) hoặc u (vận tốc). Khi dòng chảy vào miền phải cho mối liên hệ u(h). Tất nhiên các điều kiện này chỉ là đủ cho nghiệm tìm được là duy nhất. Trong thực tiễn thường cho các điều kiện hoặc Q (lưu lượng) hoặc H với mọi trường hợp, nhưng luôn có các đường thực đo để chọn nghiệm xấp xỉ tốt nhất giá trị thực đo đó. Cũng lưu ý rằng ở đây ta xét bài toán đã tuyến

tính hóa, còn thực tiễn lại tuân theo các luật phi tuyến tính, vì thế tính đúng đắn của nghiệm được chọn nhờ các thông số điều chỉnh mô hình và qua so sánh với các giá trị thực đo.

c. Điều kiện đầu và điều kiện biên cho phương trình tải khuếch tán.

(2.13) là phương trình parabol, tại mỗi đầu biên phải cho một điều kiện, chẳng hạn S(0, t) ; S(L, t). Tại thời điểm ban đầu t = 0 phải cho S (x, 0). Tuy nhiên trong thực tế không phải đối với bất kỳ bài toán nào ta cũng có được các giá trị S(0,t) và S(L, t). Tính dự báo của mô hình phụ thuộc một phần vào việc cho các điều kiện này. Ta sẽ xét cụ thể trong phần mô hình truyền mặn.

2.2.4. Điều kiện tương hợp tại các điểm hợp hoặc phân lưu

Trong các mục trên ta đã đưa ra hệ phương trình cơ bản của dòng chảy một chiều. Để mô phỏng được sát thực hơn các điều kiện thực tế, người ta cố gắng đưa thêm các yếu tố thực (vùng trữ, ô chứa) hoặc đưa thêm các tham số điều chỉnh (hệ số điều chỉnh động lượng, phân biệt độ nhám lòng, độ nhám bãi, ...). Tuy nhiên trong dòng chảy cần mô phỏng có nhiều vị trí mà các giả thiết một chiều không đúng và không áp dụng được hệ phương trình đã nêu trên, ít nhất ở dạng vi phân. Chẳng hạn tại những nơi có sự biến đổi đột ngột về hình dạng hình học như tại các điểm hợp hoặc phân lưu, tại các công trình cống, đập ... hoặc tại những vị trí có sự gián đoạn các đặc trưng thủy lực như trên các mặt sóng gián đoạn. Những vị trí này được xem là những điểm đặc biệt của mô hình tính. Như vậy toàn bộ miền được mô phỏng được xem như tập hợp các

đoạn trên đó có thể áp dụng các giả thiết và hệ phương trình Saint – Venant. Các đoạn này được nối với nhau tại các điểm đặc biệt, tại đây ta cần đưa vào các luật vật lý khác luật Saint –Venant. Các điều này thường được gọi là các điểm biên bên trong.

Trong bài toán thủy lực, tại các điểm hợp hoặc phân lưu người ta thường sử dụng các điều kiện sau đây:

✧ Tổng lưu lượng vào, ra của hợp lưu *k* đang xét nào đó bằng không (hoặc bằng sự biến đổi thể tích hợp lưu).

$$\sum_{1} Q_i = 0 \qquad (2.25)$$

i = n với *n* là tổng số nhánh nối với hợp lưu. Q_i là lưu lượng nhánh i vào ra hợp lưu *k*.

Điều kiện này suy ra từ luật bảo toàn khối lượng tại hợp lưu khi bỏ qua sự biến đổi của thể tích hợp lưu (hoặc phân lưu).

✧ Bảo toàn mức năng lượng:

$$H_1 + \frac{u_1^2}{2g} = H_2 + \frac{u_2^2}{2g} = H_3 + \frac{u_3^2}{2g}$$

Chẳng hạn đối với hợp lưu của ba nhánh như hình 2:

Nếu dòng chảy chậm sao cho có thể bỏ qua u^2 so với 2g thì:

$$H_1 = H_2 = H_3 \qquad (2.26)$$

(2.25) và (2.26) là hai điều kiện thường sử dụng trong bài toán thủy lực.

tính hóa, còn thực tiễn lại tuân theo các luật phi tuyến tính, vì thế tính đúng đắn của nghiệm được chọn nhờ các thông số điều chỉnh mô hình và qua so sánh với các giá trị thực đo.

c. Điều kiện đầu và điều kiện biên cho phương trình tải khuếch tán.

(2.13) là phương trình parabol, tại mỗi đầu biên phải cho một điều kiện, chẳng hạn S(0, t) ; S(L, t). Tại thời điểm ban đầu t = 0 phải cho S (x, 0). Tuy nhiên trong thực tế không phải đối với bất kỳ bài toán nào ta cũng có được các giá trị S(0,t) và S(L, t). Tính dự báo của mô hình phụ thuộc một phần vào việc cho các điều kiện này. Ta sẽ xét cụ thể trong phần mô hình truyền mặn.

2.2.4. Điều kiện tương hợp tại các điểm hợp hoặc phân lưu

Trong các mục trên ta đã đưa ra hệ phương trình cơ bản của dòng chảy một chiều. Để mô phỏng được sát thực hơn các điều kiện thực tế, người ta cố gắng đưa thêm các yếu tố thực (vùng trữ, ô chứa) hoặc đưa thêm các tham số điều chỉnh (hệ số điều chỉnh động lượng, phân biệt độ nhám lòng, độ nhám bãi, ...). Tuy nhiên trong dòng chảy cần mô phỏng có nhiều vị trí mà các giả thiết một chiều không đúng và không áp dụng được hệ phương trình đã nêu trên, ít nhất ở dạng vi phân. Chẳng hạn tại những nơi có sự biến đổi đột ngột về hình dạng hình học như tại các điểm hợp hoặc phân lưu, tại các công trình cống, đập ... hoặc tại những vị trí có sự gián đoạn các đặc trưng thủy lực như trên các mặt sóng gián đoạn. Những vị trí này được xem là những điểm đặc biệt của mô hình tính. Như vậy toàn bộ miền được mô phỏng được xem như tập hợp các

đoạn trên đó có thể áp dụng các giả thiết và hệ phương trình Saint – Venant. Các đoạn này được nối với nhau tại các điểm đặc biệt, tại đây ta cần đưa vào các luật vật lý khác luật Saint –Venant. Các điều này thường được gọi là các điểm biên bên trong.

Trong bài toán thủy lực, tại các điểm hợp hoặc phân lưu người ta thường sử dụng các điều kiện sau đây:

✧ Tổng lưu lượng vào, ra của hợp lưu *k* đang xét nào đó bằng không (hoặc bằng sự biến đổi thể tích hợp lưu).

$$\sum_{1} Q_i = 0 \qquad (2.25)$$

i = n với *n* là tổng số nhánh nối với hợp lưu. Q_i là lưu lượng nhánh i vào ra hợp lưu *k*.

Điều kiện này suy ra từ luật bảo toàn khối lượng tại hợp lưu khi bỏ qua sự biến đổi của thể tích hợp lưu (hoặc phân lưu).

✧ Bảo toàn mức năng lượng:

$$H_1 + \frac{u_1^2}{2g} = H_2 + \frac{u_2^2}{2g} = H_3 + \frac{u_3^2}{2g}$$

Chẳng hạn đối với hợp lưu của ba nhánh như hình 2:

Nếu dòng chảy chậm sao cho có thể bỏ qua u^2 so với 2g thì:

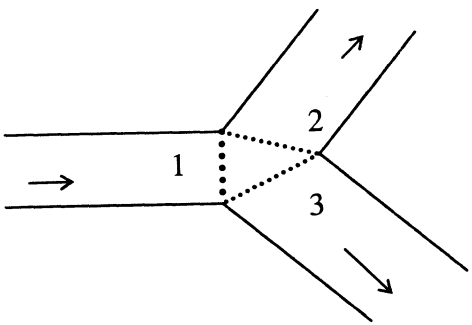
$$H_1 = H_2 = H_3 \qquad (2.26)$$

(2.25) và (2.26) là hai điều kiện thường sử dụng trong bài toán thủy lực.

Đối với bài toán lan truyền chất, tại hợp lưu thường sử dụng luật bảo toàn khối lượng /20/.

$$\frac{\partial V_k S_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} r_i \left(A u S - AD \frac{\partial S}{\partial x} \right)_i = 0 \qquad (2.27)$$

Trong đó V_K là thể tích hợp lưu thứ *k*, S_K là nồng độ tại nút, $r_i = \pm 1$ tùy theo hướng dòng chảy vào hay ra khỏi hợp lưu. Điều kiện này sẽ được phân tích trong chương 4 về mô hình lan truyền mặn.



Hình 2: