NHẬP MÔN: CƠ HỌC CHẤT LƯU
CHƯƠNG 1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CHẤT LƯU.

§1.ĐỊNH NGHĨA.

Các trạng thái lỏng và khí gọi các chất lưu chúng trái ngược với trạng thái rắn.

-Sự khác biêt giữa chất lỏng và chất khí.

Chất khí chiếm toàn bộ thể tích mà nó được chứa. Còn chất lỏng thì không (ví dụ: Bình đựng khí và bình đựng nước).

-Ranh giới giữa chất lỏng và chất khí từ sai lệch về độ lớn của ρ(khối lượng thể tích) n* (mật độ riêng hay mật độ hạt). Chất lỏng lớn hơn khoảng 1000 lần) $[\rho = \frac{M}{V}; n^* = \frac{\rho}{M} M_A \mid M_A : A$vogadro. Điều này cho thấy: Khối lượng thể tích càng tăng, thì các phần tử càng gần và các lực tương tác phân tử trong chất lỏng rất quan trọng.

-Sự khác biệt giữa chất lỏng và chất rắn.

+ Dễ chảy, lấy dạng chứa nó làm hình dáng.

+ Có thể cấu tạo lại sau khi rãi ra (rót ra).

Hiện tượng luận khác biệt giữa chất lỏng và chất rắn được giải thích bởi tính di động rất lớn của các phần tử trong trạng thái lỏng.

Một sự khác biệt nữa là vận tốc các điểm của chất rắn được tính theo theo công thức:

$$\vec{V}(\vec{P}) = \vec{V}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MP}$$

Còn đối với chất lỏng vấn đề này rất tinh tế khi chất lỏng chuyển động.

§2.MÔ HÌNHCỦA CHẤT LƯU.

-Theo kích thước vĩ mô: Chất lưu là môi trườngliên tục; người ta thường lấy chiều dài đặc trưng L để quan sát kích thước vĩ mô được áp đặt cho vấn đề nghiên cứu.

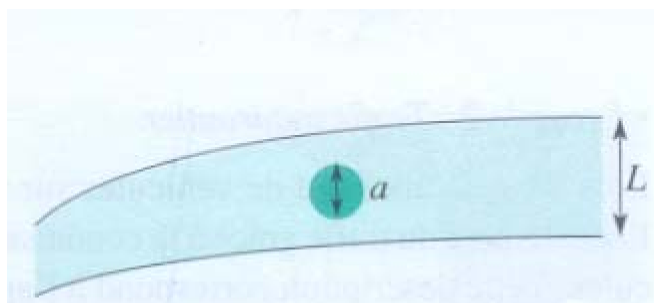
-Theo kích thước vi mô: Chất lưu là không liên tục nó gồm các phần tử đang xáo động nhiệt liên tục.

-Theo kích thước trung mô: Là kích thước trung gian giữa vĩ mô và vi mô. Chất lưu vẫn là môi trường liên tục

+ Với quan điểm này chât lưu được cắt ra bằng các tế bào phân tố hay phân tố chất lưu = hạt chất lưu (được chứa rất lớn số phân tử).

-Vận tốc của hạt chất lưu tập trung tại điểm M ở thời điểm t bằng giá trị trung bình của các vận tốc của các phần tử được chứa.

Kết luận: Kích thước hạt của chất lưu là trung mô, nó cho phép kết hợp vào hạtđó, nhưng đại lượng vĩ mô để mô tả chất lưu như một môi trường liên tục.

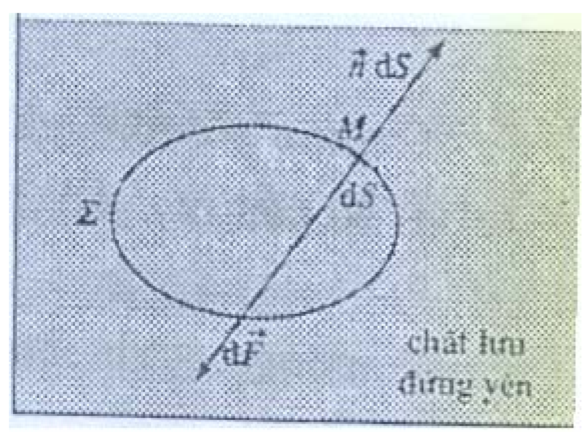


§3.ÁP SUẤT CỦA CHẤT LƯU.

1.Định nghĩa.

Áp suất P(M) tại 1 điểm M. Trong chất lưu được xác định được bởi

$$d\vec{F} = -P(M)ds\vec{n}$$



ds: phần tố diện tích bao quanh điểm M

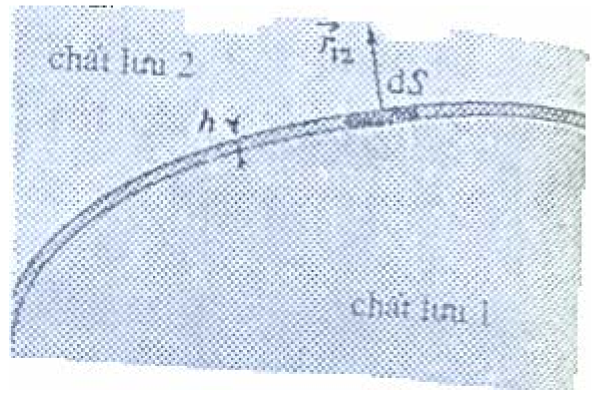
$\vec{n}$: pháp tuyến đối với ds

P(M): đại lượng vô hướng.

$d\vec{F}$: Lực bề mặt tại điểm M

2.Điều kiện ở biên.

Gọi P_1 và P_2 là áp suất 2 bên của phân tố ds. Một phân tố thể tích dV=hds, dm: phân tố khối lượng. Theo phương trình cơ bản của ĐLH:



$$dm.\vec{a} = \vec{f}_V dV + (P_1 - P_2)\vec{n}_{12} ds$$

vì h vô cùng bé $\rightarrow dm, dV = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$

Ở mặt phân cách hai chất lưu áp suất là liên tục.

§4.TÍNH NHỚT.

Để phản ánh chuyển động của các chất lưu thực. Từ thực nghiệm ta đưa ra: lực cắt (trượt) hay gọi lực nhớt trong chuyển động một chiều được thể hiện như sau:

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} S \left| \begin{array}{l} \vec{V} = v(y,t)\vec{e}_x \\ S : dientich \end{array} \right.$$

η: gọi là độ nhớt; là hằng số đặc trưng của chất lưu

Có thứ nguyên là: $[ML^{-1}T^{-1}]$: (Kg/m.s) (N.s/m^2) Pa.s

1Pa = 1N/m^2 Trong (SI) Pl = Pa.s (poisenille)

Tính nhớt là tính chất của chất lưu chống lại sự dịch chuyển. Tất cả các loại chất lưu thực đều có tính nhớt nhất định, thể hiện dưới dạng ma sát trong khi có sự di chuyển tương đối giữa các phần tử chất lưu.

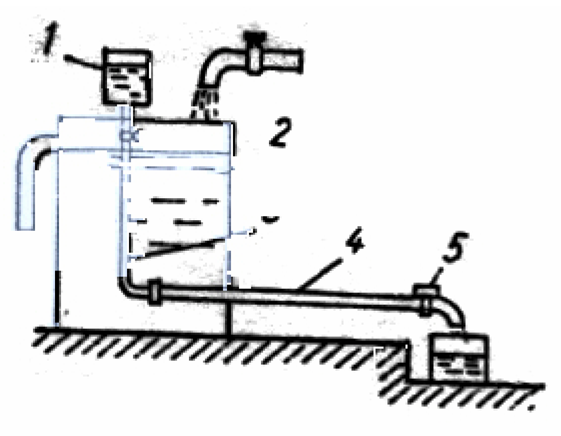
Các chất lưu rất nhớt thì có chống sức lại sự di chuyển rất lớn.Ví dụ như dầu mỡ, nhớt...

Tính nhớt đặc trưng cho độ chảy của chất lưu.

§5.PHÂN BIỆT DÒNG CHẢY TẦNG VÀ DÒNG CHẢY RỐI. SỐ REYNOLDS.

1.Thực nghiệm của dòng chảy chất lưu thực.

*Thí nghiệm của Reynolds.



Dùng bình chứa nước nối với ống thủy tinh. Khi mở khóa vòi nước có thể chảy vào ống với các vận tốc khác nhau. Nước mầu đi từ lọ đựng mầu qua ống dẫn vào ống thí nghiệm. Với vận tốc nhỏ, dòng màu trong ống không bị hòa tan với nước xung quanh và có dạng một đường chỉ thẳng.

-Dòng chảy trong trường hợp này là dòng chảy tầng. Khi tăng vận tốc trong ống, dòng nước màu lúc đầu có dạng sóng, sau đó hầu như biến mất, hòa tan trên bề mặt cắt và nhuộm đều khắp chất nước xung quanh.

-Chuyển động của chất lưu trở nên hỗn loạn, các phần tử nước được nhuộm màu "bay" đi mọi phía và va chạm với các phần tử khác và vơi thành ống: chuyển động này được gọi là chuyển động rối.

Đặc trưng cơ bản của dòng rối là: tồn tại thành phần vận tốc ngang so với phương chuyển động của dòng chảy.

*Kết luận: Dòng chảy tầng nếu các đường dòng trượt trên nhau, các phần tử luôn giữ phương song song; dòng chảy tầng xảy ra khi vận tốc rất nhỏ. Còn ngược lại, với vận tốc lớn ta có dòng chảy rôi ́(không ổn định và cấu trúc rối loạn).

2.Số Reynolds.

Sự chuyển từ tầng sang rối đối với các dòng chảy được xét thực hiện bằng:

-Vận tốc trung bình V của chất lưu: là thông số ta thấy rõ ràng trong thí nghiệm trên.

-Độ nhớt η của chất lưu. Ta hiển nhiên thấy dòng rối khó thực hiện với dầu so với nước.

-Đường kính ống D: Nếu đường kính ống nhỏ cho ta dòng chảy tầng hơn ống có đường kính lớn.

-Khối lượng thể tích ρ của chất lưu: Thông số này không ảnh hưởng; nhưng khối lượng thể tích luôn có trong phương trình tiến triển. Số không thứ nguyên được gọi số Reynolds, ký hiệu như sau:

$$R_e = \frac{\rho VD}{\eta}$$

Thực nghiệm cho thấy $\rho = 10^3$ Kgm^{-3}, $\eta = 10^{-3}$pl

nếu V = 2,5cm/s và R_e=300 : dòng chảy tầng

nếu V = 1,2m/s và Re = 14000 : dòng chảy rối.

Kết luận: Số Reynolds $R_e \le 2000$: dòng chảy tầng

$R_e > 2000$: dòng chảy rối

§6.DÒNG CHẢY CỦA CHẤT LƯU LÝ TƯỞNG.

Trong cơ học chất lưu để giảm nhẹ việc giải một số bài toán, khái niệm về chất lưu lý tưởng được sử dụng rộng rãi. Chất lưu lý tưởng được hiểu là chất lưu giả định có tính dịch chuyển tuyệt đối, tức là hoàn toàn không nhớt, cũng như không nén tuyệt đối, không dãn nở khi nhiệt độ thay đổi và tuyệt đối, không có khả năng chống lại lực cắt. Để đơn giản về tính toán ta thường chất lưu lý tưởng làm mô hình cho chất lưu thực.

§7.CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA DÒNG CHẢY CHẤT LƯU.

1.Quỹ đạo.

Chuyển động của hạt chất lưu được tạo thành bởi tập hợp các điểm của không gian và thời gian khi nó đi qua là $\vec{R}(t)$ có phương trình sau:

$$\frac{dX}{V_x(X(t),Y(t),Z(t),t)}=\frac{dY}{V_y(X(t),Y(t),Z(t),t)}=\frac{dZ}{V_Z(X(t),Y(t),Z(t),t)}=dt$$

2.Đường dòng.

Ở thời điểm t_0 đã cho, đường dòng là đường cong mà tại đó véc tơ vận tốc tiếp tuyến với mỗi điểm có phương trình:

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)}=\frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)}=\frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}$$

3.Đương phát xạ (đánh dấu).

Ở thời điểm đã cho,toàn bộ các hạt đi qua điểm này đều được "đánh dấu" và tạo thành một đường cong gọi là đường phát xa.

4.Dòng chảy dừng.

Trường vận tốc $\vec{v}(\vec{r})$ không phụ thuộc tường minh thời gian t (đối với dòng chảy này 3 đường trên trùng nhau).

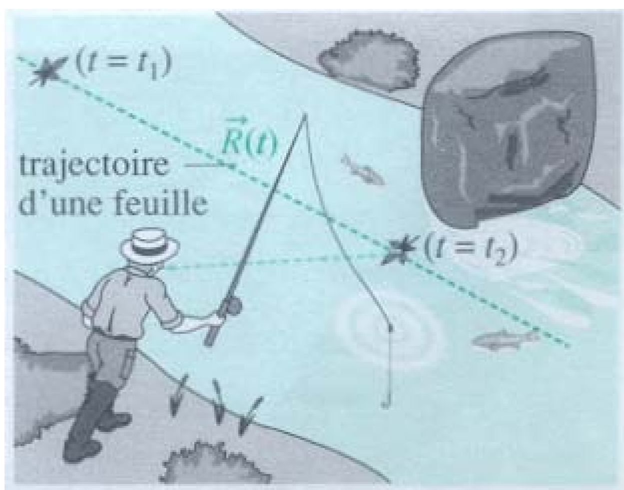
CHƯƠNG II. ĐỘNG HỌC CHẤT LƯU.

§1.MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG THEO LAGRANGE.

Chúng ta nghiên cứu một chất lưu theo vĩ mô; chuyển động chất lưu trong 1 hệ qui chiếu được gọi là dòng chảy.

Nghiên cứu dòng chảy chất lưu, mà mô tả chuyển động mỗi hạt riêng biệt của chất lưu, được xác định trước.Trong khi biết quĩ đạo $\vec{R}_i(t)$ của mỗi hạt (Đặt $\vec{R}_i(0)$với t=0), ta theo dõi quá trình chuyển động của nó và tiếp tục cho tất cả các hạt của chất lưu. Mô tả này gọi là mô tả theo Lagrange.

Ví dụ: 1.Người câu cá.



2.Giao thông trên đường ô tô.

Kết luận: Chuyển động chất lưu được mô tả hoàn toàn bằng sự biết các quĩ đạo $\vec{R}_i(t)$ của mỗi hạt được đánh dấu (định trước) 'i' của chất lưu.Còn vận tốc của các hạt được xác định bởi:

$$\vec{V}_i(t) = \frac{d\vec{R}_i(t)}{dt} = \vec{V}\left(\vec{R}_i(t), t\right)$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}(t), t)$$

Với $\vec{R}_i(t)$ vị trí ở thời gian t của hạt mà ban đầu có vị trí $\vec{R}_i(0)$ ở thời điểm đầu t=0.

Các vận tốc này chỉ phụ thuộc rõ ràng vào thời gian và các toạ độ ban đầu của hạt, tức là $\vec{R}(t)$.

Ta thường dùng ký hiệu X(t),Y(t), Z(t) làm biến Lagrange

Ví dụ áp dụng. Cho dòng chảy mô tả theo Lagrange:

$$\begin{cases} X_i(t) = X_{0,i}(1+bt) \\ Y_i(t) = Y_{0,i} \end{cases} \quad (b = const) \quad \begin{cases} X_{0,i} \\ Y_{0,i} \end{cases}$$ -Tọa độ ban đầu của hạt i khi t=0

Xác định vận tốc $\vec{V}(t)$ của các hạt và tìm $\vec{V}(\vec{R}_i(t), t)$?

<u>*Giải*</u>

$$\vec{V}_i(\vec{R}_i(t), t) = \vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}_i(t)}{dt}$$

$$\vec{V}_i(t) = \frac{dX_i(t)}{dt}\vec{e}_x = X_{0,i} b\vec{e}_x$$

$\vec{V}_i(t) = \vec{V}(\vec{R}_i(t), t) = X_0 b\vec{e}_x$, mà $X_{0,i} = \dfrac{X_i(t)}{1+bt}$

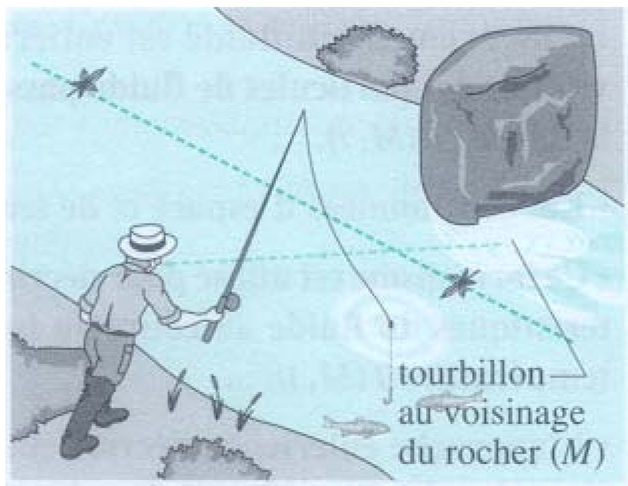
Vậy $$\vec{V}(\vec{R}_i(t), t) = \frac{X_i(t)}{1+bt} b\vec{e}_x$$

§2.MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG THEO Ơ LE.

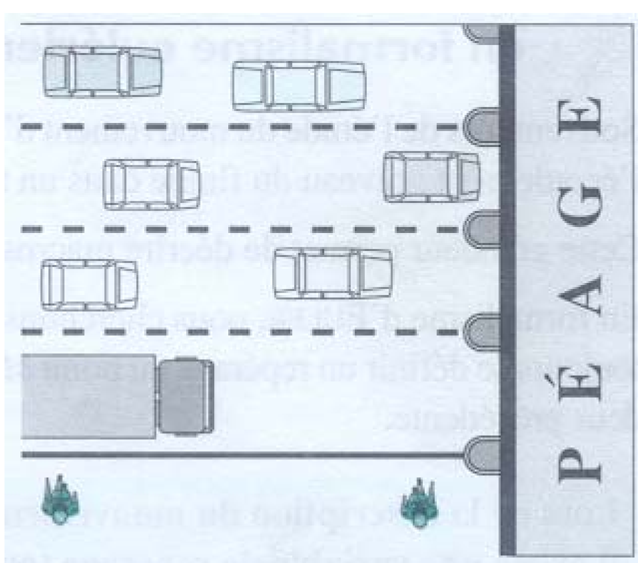
1.Khái niệm.

Chúng ta đứng tại 1 điểm của không gian và xem xét (nghiên cứu) quá trình tiến triển (biến đổi) một đại lượng vĩ mô nào đó của chất lưu theo thời gian gọi là mô tả Ơ le.

Ví dụ: 1-Vận tốc các hạt tại 1 vị trí cố định.



2-Vận tốc các Ô tô tại 1 vị trí cố định.



2.Tính độc lập của các tọa độ không gian và thời gian.

Trường vận tốc $\vec{V}(\vec{r},t)=\vec{V}(M,t)=\vec{V}(x,y,z,t)$ phụ thuộc không gian và thời gian: $\vec{r}$ và t hay (x,y, z và t) là các biến độc lập.

3.Ta định nghĩa mô tả Ở le của chất lưu.

Chuyển động của chất lưu được mô tả hoàn toàn bởi biết các vận tốc các hạt của chất lưu đi qua 1 điểm M không gian cho trước ở thời gian t.

-Các tọa độ không gian và thời gian là các biến độc lập.

-Mô tả này dùng để mô tả quá trình tiến triển (biến đổi) của các đại lượng đặc trưng khác của chất lưu theo thời gian.

Ví dụ: Áp suất P(M,t); nhiệt độ T(M,t)

-Quan điểm Ở le mô tả trạng thái chất lưu khi chuyển động bằng cách kết hợp các trường ví dụ trường vận tốc, áp suất, nhiệt độ. Phân biệt với cách viết Lagrange,ta có x, y,z và $\vec{r}\neq\vec{R}$; $\vec{v}\neq\vec{V}$

4. Ví dụ: (Biểu diễn trường hợp vận tốc bằng Ở le).

Khi nghiên cứu chuyển động của một chất lưu:tồn tại một đại lượng cho phép mô tả dòng chảy ví dụ như:

-mức nước trong ống.

-lưu lượng tthoát ra.

Các đại lượng này cho phép mô tả vĩ mô quá trình chuyển động của chất lưu.

Theo Ở le chúng ta tìm $\vec{v}(M,t)$ tại mọi điểm M của chất lưu và cần phải xác định tọa độ của M mà không mẫu thuẫn (tranh chấp) với đại lượng trước đó.

Kết luận Khi mô tả chuyển động của chất lưu bằng Ở le. Nó tồn tại:

-1 biến xác định trạng thái của chất lưu.

-1 biến cho phép định mốc Ở le của điểm M.

Chovị trí của M bởi độ cao z trên trục zz'

h(t):toạ độ phục thuộc thời gian t và độ cao chất lưu trong ống

z:tọa độ Ơle của điểm M

Thì vận tốc $\vec{V}(M,t)$ theoƠ le được cho bởi biểu thức

$$\vec{v}(M,t) = \dot{h}(t)\vec{e}_z$$

Chú ý:

Sự cần thiết dùng hai khái niệm h và z vì h(t) biểu diễn độ cao của chất lưu, còn z là độ cao điểm M.

Sự phụ thuộc của $\vec{v}(M,t)$ là hàm của:

-tọa độ không gian $\vec{e}_z$

-thời gian qua $\dot{h}(t)$

5.Tính duy nhất vận tốc của một hạt chất lưu.

-Theo Ơ le: Ta biết vận tốc của hạt ở vị trí M và thời gian t:

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t)$$

-Theo Lagrang: Cần phải biết hạt được đánh dấu, mà quĩ đạo của nó đi qua vị trí M ở thời gian t $\left(\vec{r} = \vec{R}(t)\right)$ khi t=0, $\vec{R}(0)$

Trong khi cho hạt này đi qua tại $\vec{r}$ ở thời gian t $\left(\vec{r} = \vec{R}(t)\right)$. Vận tốc của nó ở thời gian t là:

$\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{V}\left(\vec{R}(t),t\right)$ và ta có: $\vec{V}\left(\vec{R}(t),t\right) = \vec{v}(\vec{r},t)$

Vậy $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t)$ và $\vec{V}\left(\vec{R}(t),t\right)$ cần phải đồng nhất

Nhưng xử lý toán học rất khác nhau:

-Theo Lagrang ưu tiên các hạt chất lưu được theo dõi trong quá trình dịch chuyển mà chúng ta đưa vận tốc vào.

-Theo Ơ le, ưu tiên các vị trí không gian mà chúng ta đưa trường vận tốc của chúng vào, phụ thuộc không gian và thời gian (các biến độc lập).

Ở thời điểm t, tại vị trí M: $\vec{V}\left(\vec{R}(t), t\right)_{Log} = \vec{v}\left(\vec{r}, t\right)_{z}$

Theo Lagrange tại vị trí $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ở thời gian t cần phải tìm hạt mà quỹ đạo $\vec{R}(t)$ đi qua vị trí M ở thời gian t.

$$\vec{r} = \vec{R}(t)$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} X_i(t) = X_{i0}(1 + bt) \\ Y_i(t) = Y_{i0} \end{cases}$$

Theo trước ta có: $\vec{V}_i(t) = \vec{V}\left(\vec{R}(t), t\right) = \dfrac{X_i(t)}{1 + bt} b\vec{e}_x$

Chuyển từ Lagrange sang Ơ le, được thực hiện trong khi nói rằng hạt thứ i đi qua điểm có hoành độ x theo t nếu x= $X_i(t)$ nên $\vec{v}\left(\vec{r}, t\right) = \dfrac{x}{1 + bt} b\vec{e}_x$

Còn theo Ơle, ta có thể tính như sau:

$\vec{v}(\vec{r}, t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x$, mà $\dot{x}(t) = \dot{X}(t) = \dot{X}$ $X_{i,o}$ b vì $X_{i,o} = \dfrac{X(t)}{1 + bt}$

nên $\dot{x}(t) = \dfrac{X(t)}{1 + bt} b = \dfrac{x(t)}{1 + bt} b$

vậy $\vec{v}\left(\vec{r}, t\right) = \dfrac{x}{1 + bt} b\vec{e}_x$

III.Đạo hàm toàn phần.

1.Ý nghĩa vật lý của một biến đổi toàn phần.

Xét chuyển động rơi của người dù có vận tốc thẳng đứng $\vec{v} = v\vec{e}_z$ (v<0) trong khí quyển ở nhiệt độ không đổi, nhưng phụ thuộc vào độ cao theo qui luật:

$$T(z) = T_o + \alpha z \quad (\alpha<0)$$

tồn tại: $\overrightarrow{\text{grad}}T = \dfrac{dT}{dz}\vec{e}_z = \alpha\vec{e}_z$

Giả sử, người nhảy dù muốn xét sự biến đổi của nhiệt độ $T_{dù}$ theo thời gian t trong quá trình rơi của nó, ta đi tính $\dfrac{dT_d}{dt}$

Cách 1: Giả sử, người dù rơi tới đất ở thời điểm t_0, thì độ cao của dù được cho:

$Z_{ngdù} = v(t-t_0)$ (với v<0)

Nhiệt kế để đo nhiệt độ tức thời được biểu thị:

$T_{ngdù}=T_0 + \alpha Z_{ngdù} = T_0 + \alpha v(t-t_0)$

Ta có: $\dfrac{dT_{du}}{dt} = \alpha v > 0$

Cách 2: Trong thời gian dt, người dù được dịch chuyển dz=vdt hoặc có thể viết $d\vec{M} = \vec{v}dt$.

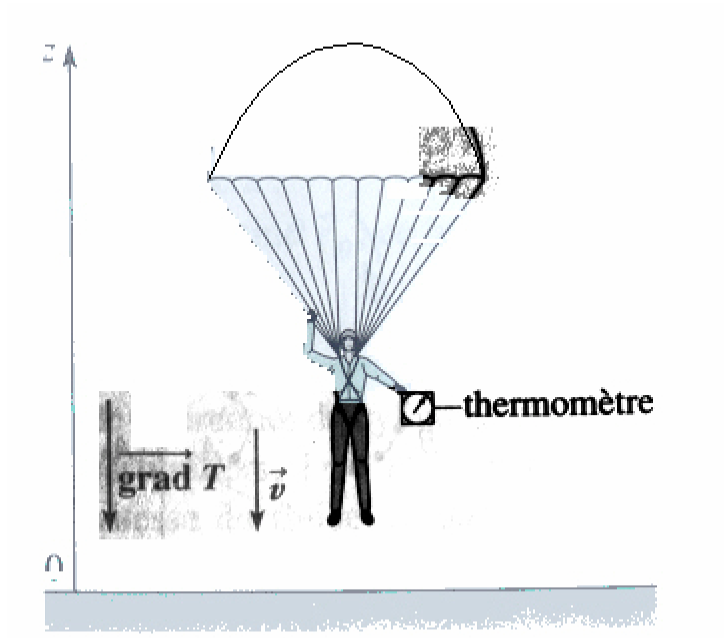
Sự biến đổi nhiệt độ tương ứng được cho bởi: $dT_{du} = \dfrac{dT}{dz}dZ$

hoặc có thể viết: $dT_{du} = \overrightarrow{\text{grad}}T.d\vec{M}$

đặt dZ=vdt hoặc $d\vec{M} = \vec{v}dt$

Từ đây: $dT_{du} = \frac{dT}{dz} v dt$, hay $dT_{du} = \vec{v}\,\overrightarrow{grad}T dt$

Ngoài ra, ta có: $\frac{dT_{du}}{dt} = \alpha v$, mà có thể viết tương tự $\frac{dT_{du}}{dt} = \vec{v}.\overrightarrow{grad}T$



Sự biến đổi này, trình bày sự biến đổi cục bộ của nhiệt độ nhìn theo "người dù" xét giống như 1 hạt. Nó được gọi là sự biến đổi toàn phần hay đạo hàm toàn phần của nhiệt độ được viết $\frac{DT}{Dt} \neq \frac{\partial T}{\partial t}$ ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, trong trường hợp chúng ta quan tâm) hay $\frac{\partial T}{\partial z}$ đạo hàm riêng đối với độ cao z (đại lượng bằng α trong trường hợp trình bày).

Như vậy, người nhảy dù cầm trong tay nhiệt kế và quan sát nhiệt độ biến đổi theo thời gian, đo bằng đạo hàm toàn phần $\frac{DT}{Dt}$. Trong ví dụ được xét, người nhảy dù quan sát một sự biến đổi được gọi đối lưu(convective). $\frac{DT}{Dt} = \vec{v}\,\overrightarrow{grad}T$

Nếu dừng sự rơi và quan sát trong chế độ không dừng (không ổn định) một sự biến thiên cục bộ theo nhiệt độ xuất hiện : $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$

Trong trường hợp chung ta có:

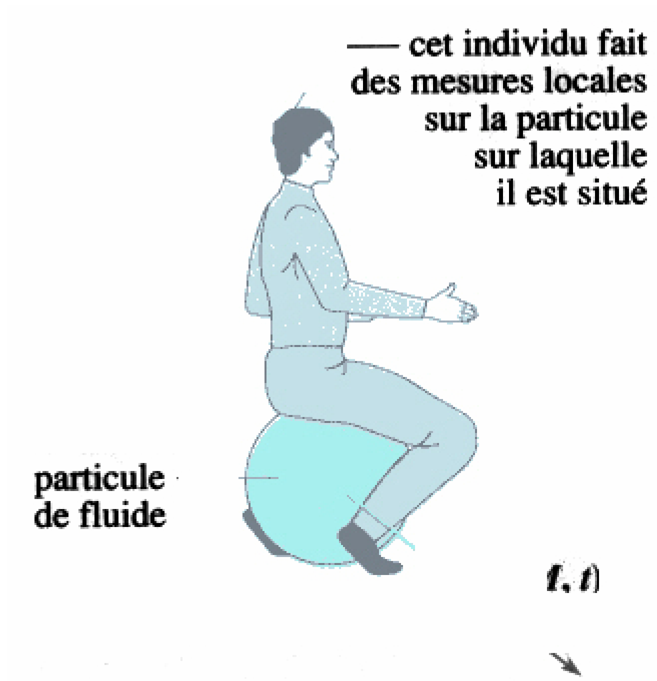
$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{grad}T = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{grad}\right)T$$

2.Ý nghĩa vật lý của biến đổi toàn phần đối với chất lưu.

Ví dụ trên cho chúng ta nắm được khái niệm đạo hàm toàn phần.

Chúng ta tưởng tượng một người ngồi trên 1 hạt chất lưu.

Các biến các đại lượng được đo là các biến đổi toàn phần.



Đối với hạt này, đạo hàm 1 đại lượng vô hướng (véc tơ $\vec{G}$), được viết $\frac{DT}{Dt};\frac{D\vec{G}}{Dt}$

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{g(M + d\vec{M}; t + dt) - g(M, t)}{dt} \quad \text{với } d\vec{M} = \vec{v}(M, t)dt$$

$$\frac{D\vec{G}}{Dt} = \frac{\vec{G}(M + d\vec{M}; t + dt) - \vec{G}(M, t)}{dt} \quad \text{với } d\vec{M} = \vec{v}(M, t)dt$$

Bài tập:

1.Cho dòng chảy theo Lagrange dưới dạng:

$$\begin{cases} X(t) = X_0(1+bt) \text{ (với b=const)} \\ Y(t) = Y_0 \end{cases}$$

Tìm gia tốc của 1 hạt trực tiếp và sử dụng theo Ơ le

2.Cho trường vận tốc với trục OZ thẳng đứng, hướng lên.

Xác định bởi $\vec{v} = \left| \begin{array}{l} v_x = u_0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{array} \right.$

3.Ta xét 1 dòng chảy chất lưu giữa mặt y=0 và mặt vô hạn do dao động X=asinωt. Ta có trường vận tốc:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = a\omega e^{-Ky}\cos(\omega t - ky)\vec{e}_x = v(y,t)\vec{e}_x \,.$$

Tìm gia tốc của hạt.

Lưu ý: $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0, \dfrac{DP}{Dt} = 0$

Nghĩa là: hạt chất lưu có khối lượng không đổi, thể tích của nó nhưng thay đổi theo thời gian; tương tự đối với áp suất.

3.Đạo hàm toàn phần một đại lượng vô hướng g.

Khi mô tả động học các dòng chảy, chúng ta đã xét từ quan điểm Lagrange đến quan điểm Ơ le trong khi quan tâm đến trường vận tốc của chất lưu. Chúng ta tìm cách biểu diễn đạo hàm toàn phần của một đại lượng vô hướng. Chúng ta biết rằng $\vec{v}(\vec{r},t)_{ole} = \vec{V}(\vec{R}(t),t)_{Lag}$, ở đây $\vec{R}(t)$ biểu thị quĩ đạo của hạt đi qua điểm M ở thời gian t. Như vậy ta có:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) = \overrightarrow{0M}$$

Xét 1 đại lượng vô hướng $g(\vec{r},t)$: $g = \rho$: khối lượng thể tích.

g =P : áp suất.

Cần tìm $\dfrac{Dg}{Dt} = \ ?$

trong dt, hạt dịch chuyển từ điểm M(X,Y,Z) tới $M'\left(X + dX, Y + dY, Z + dZ\right)$ với $dX = v_x dt; dY = v_y dt; dZ = v_z dt$ hay $d\vec{M} = \vec{v}dt$ đại lượng g biến thiên Dg.

$$Dg = \frac{\partial g}{\partial x}dX + \frac{\partial g}{\partial y}dY + \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}dt$$

Từ đây $Dg = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}v_x + \dfrac{\partial g}{\partial y}v_y + \dfrac{\partial g}{\partial z}v_z + \dfrac{\partial g}{\partial t}\right)dt \rightarrow$ Đạo hàm toàn phần

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + v_x\frac{\partial g}{\partial x} + v_y\frac{\partial g}{\partial y} + v_z\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}g = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}\right)g$$

Trong đó:

- $\vec{v}\overrightarrow{grad}$ (số hạng) đạo hàm đối lưu (convective): nó chỉ ra tính không đồng nhất của g.

- $\dfrac{\partial}{\partial t}$:đạo hàm cục bộ, nó chỉ ra tính không thường xuyên của g.

Vậy ta có thể viết: Đạo hàm toàn phần của khốilượng thể tich ρ

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}gra\vec{d}\rho$$

4.Đạo hàm toàn phần của đại lượng véc tơ $\vec{G}$

$$\vec{G} = G_x\vec{e}_x + G_y\vec{e}_y + G_z\vec{e}_z$$

$$\frac{D\vec{G}}{Dt} = \frac{DG_x}{Dt}\vec{e}_x + \frac{DG_y}{Dt}\vec{e}_y + \frac{DG_z}{Dt}\vec{e}_z, \text{ với } \frac{DG_x}{Dt} = \frac{\partial G_x}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}G_x$$

vậy $\dfrac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}\right)\left(G_x\vec{e}_x + G_y\vec{e}_y + G_z\vec{e}_z\right)$

Toán tử $\left(\vec{v}\overrightarrow{grad}\right) = v_x\dfrac{\partial}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ trong tọa độ Đê các.

Tương tự trước đây: $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\overrightarrow{grad}\right)\vec{G}$

Trong tọa độ trụ: $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial t} + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{G}$

Trong tọa độ cầu: $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial_r} + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\vec{G}$

5.Áp dụng: Gia tốc của hạt.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{a}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$$

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + rot(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Ví dụ: Cho dòng chảy hai chiều, trường vận tốc được xác định trong vùng x>0; y>0 là $\vec{v}(M,t)(-kx, ky)$ tức là:

$$\vec{v}(\vec{r},t) = -kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y$$

Hãy tính gia tốc của hạt theo Ở le và Lagrange:

*Theo Ở le:

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - kx\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}\right)(-kx) = k^2x$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - kx\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}\right)(ky) = k^2y$$

Vậy $\vec{a} = k^2\overrightarrow{0M}$

*Theo Lagrange: Quỹ đạo được tìm bởi:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -kX(t)\\ \frac{dY}{dt} &= kY(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X = X_0 e^{-kt} \\ Y = Y_0 e^{kt}\end{cases}$$

$$V_x(t) = \frac{dX}{dt} = -kX_0e^{-kt} = -kX(t)$$

$$V_y(t) = \frac{dY}{dt} = kY_0 e^{kt} = kY(t)$$

$$a_x = \frac{dV_x(t)}{dt} = k^2 X_0 e^{-kt} = k^2 X(t)$$

$$a_y = \frac{dV_y(t)}{dt} = k^2 Y_0 e^{kt} = k^2 Y(t)$$

$$\vec{a} = k^2 \vec{R}(t); \vec{R}(t) = \vec{r}(t) = X(t)\vec{e}_x + Y(t)\vec{e}_y$$

CHƯƠNG 3.SỰ BẢO TOÀN KHỐI LƯỢNG.

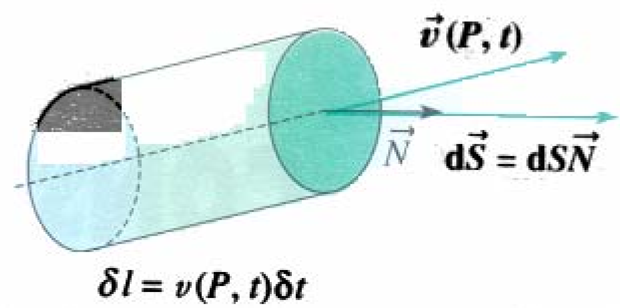
§1.LƯU LƯỢNG KHỐI .

1.Định nghĩa.

Lấy một mặt định hướng $\vec{S}$ trong một hệ qui chiếu.

Gọi δm là khối lượng phân tố đi qua mặt $\vec{S}$ trong thời gian δt.

Ta gọi Dm là lưu lượng khối của chất lưu đi qua mặt $\vec{S}$ sao cho $\delta m = Dm\delta t$.



Doc. 1. *Les particules qui traversent* d*S sont situées dans le cylindre.*

Dm được xác định như sau: $d\vec{S} = dS\vec{N}, d\vec{l} = \vec{v}(P,t)\delta t$

Thể tích phân tố: $d\tau = \vec{v}(P,t)d\vec{S}\delta t = \vec{v}(P,t)\vec{N}dS.\delta t$

Khối lượng : $S(P,t)d\tau = S(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS\delta t = \delta m$

Lưu lượng khối phân tố:

$$dDm = \rho(P,t)\vec{v}(P,t)d\vec{S} = \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS$$

Lưu lượng khối đi qua 1 mặt xác định trước.

$$\dot{D}_m = \iint \rho(P,t)\vec{v}(P,t)d\vec{S} = \iint \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS$$

(không đóng)　　(không đóng)

$$D_m = \oiint \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS$$

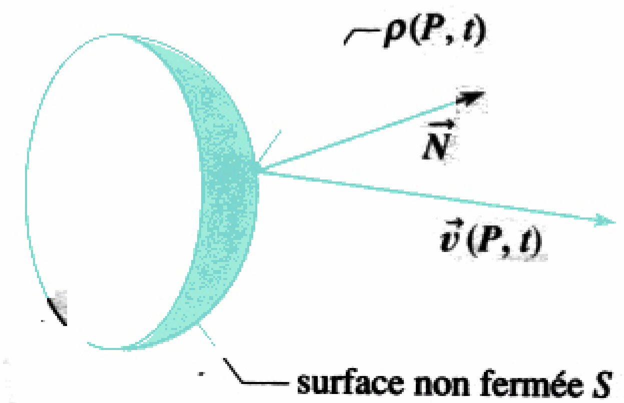
S(đóngkín)

Đặt:

$\rho\vec{v} = \vec{j}(P,t)$ gọi là mật độ thể tích của dòng khối lượng

$$D_m = \iint_S \vec{j}(P,t)\vec{N}dS$$

$$D_m = \oiint_S \vec{j}(P,t)\vec{N}dS$$



Doc. 2. *Expressions intervenant dans le débit massique à travers une surface S non fermée.*

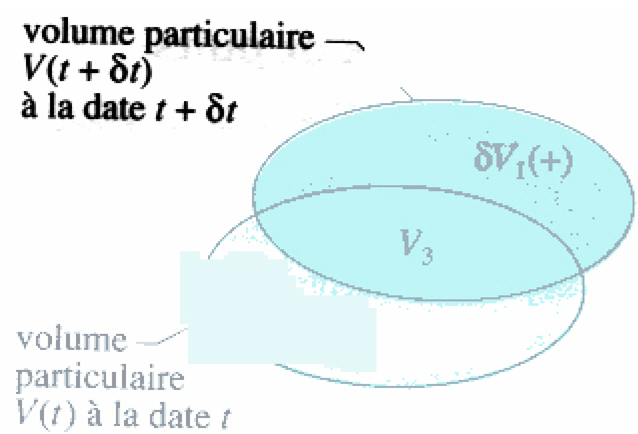
2.Mặt kiểm soát và mặt đặc biệt.

*Mặt kiểm soát là 1 mặt cố định trong 1 hệ qui chiếu, mặt này định một thể tích kiểm soát

*Mặt đặc biệt là 1 mặt trên đó được xếp đặt một cách liên tục các hạt của chất lưu.

-Các điểm trên mặt được dịch chuyển với vận tốc như vận tốc của chất lưu. Mặt này định một thể tích đặc biệt.

Mặt này bị kéo đi bởi chất lưu.



Doc. 7. *Lors du déplacement du volume particulaire, nous mettons en évidence trois zones jouant des rôles différents.*

Hệ quả: Mặt này bị kéo đi với vận tốc của chất lưu. Không có một sự chuyển qua mặt này.

Khối lượng M nằm trong thể tích đặc biệt bất biến theo thời gian.

Như vậy: $\frac{DM}{Dt} = 0$

-Đạo hàm toàn phần của 1 tích phân theo thể tích. Ta tính:

$\frac{DG}{Dt}$, với $G = \iiint_V g(M,t)dt$

Nếu $g(M,t) = \rho(M,t)$: khối lượng thể tích thì G: là khối lượng của chất lưu được chứa trong thể tích đặc biệt.

Theo định nghĩa đạo hàm toàn phần của G là $\frac{DG}{Dt}$ được biểu thị:

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\iiint_{v:(t+\delta t)} g(M, t+\delta t)d\tau - \iiint_{v(t)} g(M, \delta t)d\tau}{\delta t}$$

$$= \frac{\left[\iiint_{V_3} g(M, t+\delta t)d\tau - \iiint_{V_3} g(M,t)d\tau\right] + \left[\iiint_{\delta V_1} g(M, t+\delta t)d\tau - \iiint_{\delta V_2} g(M,t)d\tau\right]}{\delta t}$$

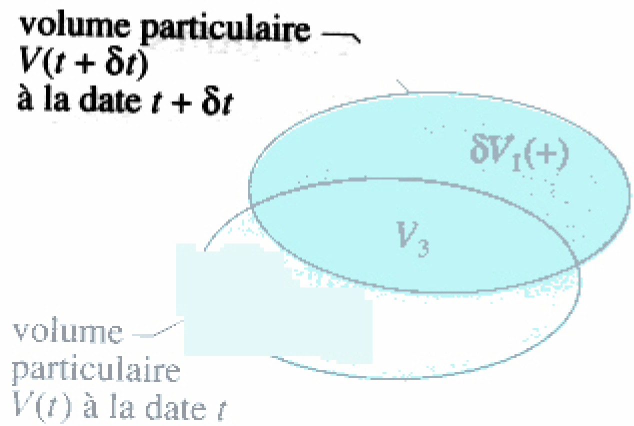
$$= \frac{\left[\iiint_{V_3} \frac{\partial g(M,t)}{\partial t} d\tau\right]\delta t}{\delta t} + \frac{\left[\iiint_{\delta V_1} g(M, t+\delta t)d\tau - \iiint_{\delta V_2} g(M,t)d\tau\right]}{\delta t}$$

Ta nhận được

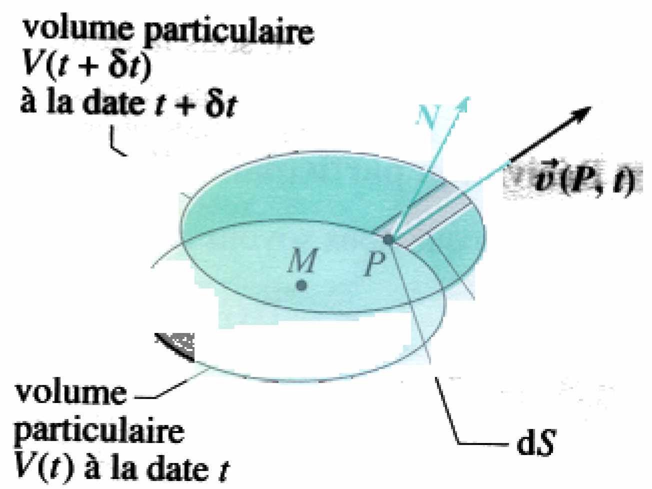
$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial g(M,t)}{\partial t} d\tau + \oiint_S g(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS$$

Kết luận: Số hạng $\iiint\limits_{V} \frac{\partial g(M,t)}{\partial t} d\tau$ biến cục bộ

Số hạng $\oiint\limits_{S} g(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS$ biến đối lưu



Doc. 7. *Lors du déplacement du volume particulaire, nous mettons en évidence trois zones jouant des rôles différents.*



Doc. 8. ***L'élément de volume*** $d\tau$ ***est égal à :***
$d\tau = \vec{v}(P,t).\vec{N}\,dS\,\delta t$

Ví dụ: Nếu g = 1 $\Rightarrow$

G = V. Theo Ôstrôgradski

$$\frac{DV}{Dt} = \oiint\limits_{S} \vec{v}(P,t)\vec{N}dS = \iiint\limits_{V} div(\vec{v})d\tau$$

Nếu $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$: thể tích toàn phần không đổi

$\rightarrow$ Khối lượng thể tích cũng không đổi; $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

Đó là tính đặc trưng của dòng chảy không nén được

§2.CÂN BẰNG KHỐI LƯỢNG.

1.Phương trình tổng quát trong môi trường không có nguồn.

Xét 1 thể tích V cố định (Thể tích kiểm soát) của không gian được chiếm bởi chất lưu định bởi 1 mặt đóng S (mặt kiểm soát) trong 1 hệ qui chiếu, $\vec{N}$ - pháp tuyến ngoài.

Khối lượng của chất lưu m(t) chứa trong thể tích V, được viết

$$m(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau$$

Phần chất lưu đi vào và ra liên tục được định (giới hạn) bởi mặt cố định nên khối lượng m(t) chỉ phụ thuộc vào thời gian t.

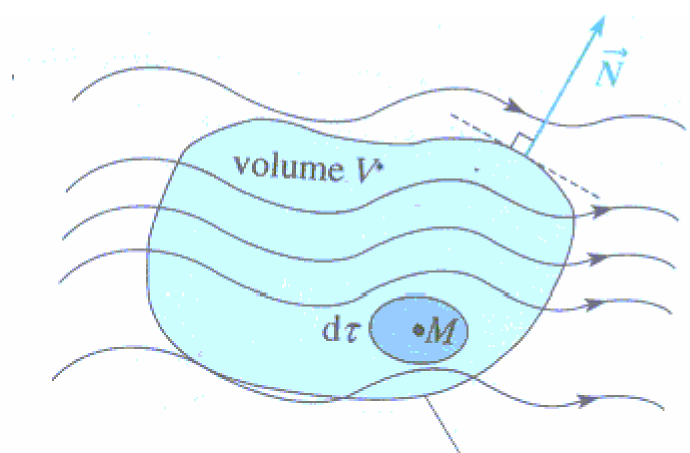
*Đối với 1 phân tố thể tích dτ chứa khối lượng $dm = \rho(M, t) d\tau$. Sự biến đổi $\delta(dm)$ trong thời gian δt

$$\delta(dm) = \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau \delta t$$

Khối lượng toàn bộ của chất lưu ở trong thể tích V được biến đổi trong thời gian δt là:

$$\delta m = \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau \delta \qquad V \text{ (cố định)}$$

*Khối lượng δm đi qua mặt phẳng S cố định được định bởi thể tích V trong thời gian δt.



Doc. 9. La surface S fermée (et fixe) délimite un volume V fixe. La normale est orientée vers l'extérieur.

Sự tăng khối lượng này phù hợp với khối lượng của chất lưu đã đi qua mặt S từ ngoài vào trong với khoảng thời gian δt nghĩa là:

$$\delta m = -D_{m,ra}\delta t$$

Biểu thị dưới dạng

$$\delta m = -\underset{S\ \text{đóng}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS.\delta t$$

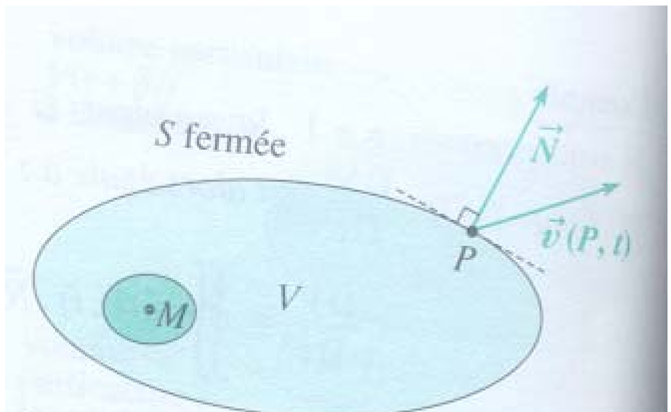
cố định giới hạnV

Vậy ta có phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau + \underset{S\ \text{đóng (kín)}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS = 0$$

Công thức ghi nhớ.

Sự cân bằng của quá trình biến đổi khối lượng chứa trong thể tích V cố định không có nguồn được thể hiện bằng phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân.



Doc. 10. *Bilan de masse associé à un volume de contrôle V fixe.*

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau = -D_m, ra$$

hay

$$\underset{\text{cố định}}{\iiint_V} \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau + \underset{S\ \text{(đóng)}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS = 0$$

2.Trường hợp môi trường có nguồn.

Gọi $D_{m,\text{nguồn}}$: lưu lượng khối nguồn

Ta có: $\iiint\limits_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau = -D_{m,ra} + D_{m,\text{nguồn}}$

Hay: $\iiint\limits_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau + \oiint\limits_S \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS = D_{m,\text{nguồn}}$

đóng giới hạn V

3.Bảo toàn lưu lượng khối

*Chế độ ổn định (dừng): $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow D_{m,ra} = D_{m,\text{nguồn}}$

*Chất lưu không chịu nén : $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow D_{m,ra} = D_{m,\text{nguồn}}$

Nếu không có nguồn cung cấp: $D_{m,\text{nguồn}} = 0$

4.Bảo toàn lưu lượng thể tích của chất lưu không chịu nén.

Nếu $\rho = \text{Const}$ thì gọi D_v là lưu lượng thể tích ta có:

$$D_m = \rho D_V \Rightarrow D_V = \iint\limits_S \vec{v}(P,t)d\vec{S} \text{ hay } D_v = \oiint\limits_S \vec{v}(P,t)\vec{N}dS$$

không đóng (mở) đóng

Kết luận:

Trong trường hợp chất lưu không chịu nén, sự bảo toàn lưu lượng khối dẫn đến sự bảo toàn lưu lượng thể tích.

§3.DẠNG CỤC BỘ (ĐỊA PHƯƠNG) CÂN BẰNG KHỐI LƯỢNG.

1.Phương trình tổng quát.

Trường hợp không nguồn, ta có phương trình tổng quát sau:

$$\iiint_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau + \oint\!\!\oint_{S\ \text{đóng}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t)\vec{N}dS = 0$$

Theo công thức Ostrogradski ta có:

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}[\rho(M,t)\vec{v}(M,t)]\right\}d\tau = 0$$

$$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}[\rho(M,t)\vec{v}(M,t)] = 0$$

Hay $\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}\vec{f}(M,t) = 0$ gọi là phương trình bảo toàn khối lượng dạng cục bộ (địa phương).

Mặt khác ta có: $div(\rho\vec{v}) = \rho div\vec{v} + \overrightarrow{grad}\rho.\vec{v}$

Thế vào phương trình trên ta chú ý: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho = \frac{D\rho}{Dt}$

Ta có thể nhận được phương trình bảo toàn khối lượng dạng cục bộ còn gọi phương trình liên tục có dạng sau:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\text{div}\vec{v} = 0$$

Trong chế độ ổn định ta có: $\text{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Đối với chất lưu không chịu nén vì $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ta có $\text{div}\vec{v} = 0$

Ví dụ áp dụng (xem ví dụ 3 trang 45) và 4,5 $\rightarrow$ Bài tập 3,4.

Cho trường vận tốc của chất lưu không chịu nén, chảy ra lưu lượng khối lượng D_m bởi một nguồn theo đơn vị chiều cao h trùng với trục 0Z, biết rằng các hạt thoát ra vuông góc với dòng tức là:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r, t)\vec{e}_r$$

xem hình vẽ

hãy tính gia tốc của hạt chất lưu.

CHƯƠNG 4.MÔ TẢ ĐỊNH HÌNH MỘT VÀI LOẠI DÒNG CHẢY.

§1.CÁC ĐẶC TRƯNG VẬN TỐC CỦA CHẤT LƯU.

1.Mô tả cục bộ.

Đối với dòng chảy bất kỳ, sự vận động của một phân tố thể tích chất lưu tổ hợp ba dáng cục bộ được nhìn thấy riêng rẽ:

+sự giản nở (dilatation).

+sự quay (rotation).

+sự biến dạng (deformation).

Đối với dòng chảy phẳng là sự vận động của một phân tố diện tích

2.Trường vận tốc và sự giãn nở: vai trò của toán tử $\mathrm{div}\vec{v}$

Một dòng hcảy ba chiều được giả thuyết là mỗi thành phần vận tốc chỉ phụ thuộc vào tọa độ tương ứng M(x,y,z):

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,t).\vec{e}_x + v_y(y,t).\vec{e}_y + v_z(z,t).\vec{e}_z$$

Trong thời gian δt, các vách của một phần tử thể tích dxdydz dịch chuyển trực giao với chính chúng.

Cạnh có chiều dài dx của hình lập phương trở thành :

$$dx' = x + dx + v_x(x+dx,t)\delta t - [x + v_x(x,t)\delta t] = dx\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta t\right)$$

Tương tự ta có :

$$dy' = dy\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta t\right) \text{ và } dz' = dz\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z}\delta t\right)$$

Như vậy thể tích nguyên tố Δτ đã biến thành δ(Δτ) sao cho :

$$\delta(\Delta\tau) = dx'dy'dz' - dxdydz \approx \Delta\tau\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta t = div\vec{v}\Delta\tau\delta t$$

Nghĩa là :

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{\delta t}\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Về cục bộ: thì hệ số biến đổi tương đối của thể tích trong đơn vị thời gian bằng div của trường vận tốc.

Trường vận tốc của chất lưu cho ta thông tin về sự giãn nở của nó nhờ trung gian div của vận tốc (Nếu $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ ta có $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ dòng chảy không chịu nén được).

3.Trường vận tốc và sự quay: vai trò của toán tử $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v}$.

Ở cục bộ, trường các vận tốc của chất lưu có thể đồng dạng (giống như) trường vận tốc các điểm thuộc vật rắn quay (có véc tơ quay $\vec{\Omega}$). Sự quay đặc biệt này (sự xoáy) của chất lưu tại một điểm M sẽ tồn tại nếu $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega} \neq 0$.

Cho ta biết sự tồn tại các vùng xoáy.

Toán tử $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{G} = \begin{cases} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{cases}$$

xem ví dụ $\rightarrow$ chứng minh : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v} = 2\vec{\omega}$

§2.Các đặc trưng của dòng chảy.

1.Dòng chảy dừng.

Một dòng chảy đối với trường vận tốc Ơ le của chất lưu không phụ thuộc thời gian t tường minh:

$$\vec{v} = \vec{v}(M) voi \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Trong dòng chảy dừng, lưu lượng khối đi qua mọi tiết diện của ống dòng như nhau vì $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(M)$: nên $D_{m,ra} = D_{m,nguồn}$.

2.Dòng chảy không chịu nén được.

Dòng chảy mà thể tích của các hạt chất lưu được bảo toàn trong quá trình chuyển động gọi dòng chảy không chịu nén.

Ta có: $\mathrm{div}\vec{v}(M, t) = 0$ tại mọi nơi.

Trong dòng chảy không chịu nén lưu lượng khối đi qua mọi tiết diện của ống dòng như nhau: $D_{m,ra} = D_{m,nguồn}$.

3.Dòng chảy xoáy và không xoáy.

Một dòng chảy được gọi không xoáy nếu véc tơ xoáy $\vec{\Omega} = 0$ $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v} = 0)$ tại mọi nơi, ngược lại nếu $\vec{\Omega} \neq 0$ gọi là dòng chảy xoáy.

4.Dòng chảy phẳng không chịu nén được.

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \begin{cases} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \\ v_z = 0 \end{cases} ; \ \mathrm{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{v}$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \psi(x, y, t) \end{cases}$$

Khi đó $\vec{v} = \overrightarrow{rot}[\psi(x, y, t)\vec{e}_z] = \overrightarrow{grad}[\psi] \wedge \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) = \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$\psi(x, y, t)$ gọi là hàm dòng

$\psi = cte$ tương ứng với một đường dòng

Khi có dòng chảy phẳng không chịu nén được, thì có thể xác định 1 hàm ψ gọi hàm dòng sao cho.

$$\vec{v} = \overrightarrow{rot}[\psi(x, y, t)\vec{e}_z] = \overrightarrow{grad}\psi(x, y, t) \wedge \vec{e}_z$$

Các đường dòng $\psi(x, y, t_0) = cte$ đồng nhất với các đường dòng ở t_0.

5.Dòng chảy thế.

Một dòng chảy không xoáy được gọi là dòng thế tại mọi điểm của dòng chảy (tồn tại ϕ sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{grad\phi}$, ϕ gọi là thế vận tốc)

Thế của các vận tốc ϕ phải thỏa mãn $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\Phi$

-Nếu dòng chảy thế không chịu nén được, thì hàm ϕ sẽ tuân theo phương trình Laplace: $\Delta\phi = 0$ (vì $div\vec{v} = 0, div\left(\overrightarrow{grad}\phi\right) = \Delta\phi = 0$).

CHƯƠNG 5.PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC ĐỊA PHƯƠNG ĐỐI VỚI DÒNG CHẢY LÝ TƯỞNG.

§1.Ứng suất trong chất lưu.

1.Lực mặt (ứng suất mặt).

Chúng ta định ranh bên trong chất lưu bởi 1 mặt đóng cố định Σ. Các hạt chất lưu ở bên ngoài mặt Σ tác dụng lên các hạt ở bên trong, tác dụng này xảy ra ngắn và lân cận ở mặt Σ. Giả sử có 1 phân tố mặt dS của Σ. Hợp lực $d\vec{F}$ các lực tác dụng bởi các hạt bên ngoài lên bên trong được phân tích thành 2 thành phần $d\vec{F}_N$ và $d\vec{F}_T$ hay $d\vec{F} = d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$

Thành phần $d\vec{F}_N$ được gọi áp lực (áp suất) và được xác định:

$$d\vec{F}_N = -P(M,t)\vec{N}dS$$

Thành phần $d\vec{F}_T = \eta\left(\overrightarrow{grad}v.\vec{n}\right)dS\vec{T}$; nếu $\vec{v} = v\vec{T}$ gọi lực nhớt.

Đối với chất lưu lý tưởng, ta bỏ qua lực nhớt $d\vec{F}_T = 0$

2.Lực thể tích (Lực khối).

Xét 1 phân tố thể tích $d\tau$ của chất lưu chịu tác dụng của các lực thể tích (ví dụ trọng lực). Những tác dụng này liên quan tới tất cả các hạt, như vậy nó tỉ lệ với số lượng hạt hay phân tố thể tích $d\tau$.

Vậy: $d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau \rightarrow d\vec{f}$ gọi là lực thể tích.

Trong trường trọng lực với gia tốc trọng trường $\vec{g}$

Mật độ thể tích của lực là: $\vec{f}_v = \rho\vec{g}$

Mặt khác ta có: $dm = \rho d\tau$

Lực thể tích có thể viết: $d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_m \rho d\tau$

$\Rightarrow \vec{f}_v = \rho\vec{f}_m$; với lực trọng trường thì $\vec{f}_m = \vec{g}$

Kết luận: Với phân tố thể tích $d\tau$ và khối lượng dm của chất lưu chịu tác dụng các lực khối hay thể tích được biểu diễn như sau:

$$d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_v d\tau \text{ với } \vec{f}_v = \rho \vec{f}_m$$

Đối với trọng lực : $\vec{f}_v = \rho\vec{g}$ với $\vec{f}_m = \vec{g}$

3.Sự tương đương của lực thể tích, khối lượng.

Ta chỉ xét trường hợp lực áp suất.(áp lực)

Theo trước đây khi xét các lực nguyên tố tác dụng lên 6 mặt của hình hộp phân tố thể tích chất lưu ta có:

$$d\vec{F} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z}dxdydz\vec{e}_z$$

$$= -\overrightarrow{grad}P d\tau = -\overrightarrow{grad}P\frac{\rho d\tau}{\rho} = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}dm$$

Lực này đồng nhất 1 lực thể tích. $\vec{f}_v = -\overrightarrow{grad}P$

Kết luận: Sự tương đương của lực thể tích (khối lượng) của các lực áp suất trên mặt được biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{grad}P$$

$$\vec{f}_m = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}$$

Các tương đương này dùng để tính hợp lực hay mômen của các lực áp đặt lên 1 phân tố bao quanh bởi chất lưu.

Các tương đương này không dùng để tính công của các lực áp suất.

§2.Phương trình Ơ le và áp dụng.

Chỉ xét cho dòng chảy lý tưởng không có lực nhớt.

1.Phương trình.

Phương trình cơ bản của động lực học đối với một hạt chất lưu có khối lượng dm. Dưới tác dụng của hợp lực $d\vec{F}$ ta có thể viết:

$$dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau = \vec{f}_m dm$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{m\text{ ,toàn bộ}}$$

$$\text{vì } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}$$

$$= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_{m\text{ ,toàn bộ}} \quad \left(\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v}\right)$$

(sử dụng công thức: $\left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{A^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{A} \wedge \vec{A}$

$$\text{vì } \left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} = \left(Ax\frac{\partial}{\partial x} + Ay\frac{\partial}{\partial y} + Az\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix}$$

$$= Ax\frac{\partial Ax}{\partial x} + Ay\frac{\partial Ax}{\partial y} + Az\frac{\partial Ax}{\partial z}$$

$$+ Ax\frac{\partial Ay}{\partial x} + Ay\frac{\partial Ay}{\partial y} + Az\frac{\partial Ay}{\partial z}$$

$$+ Ax\frac{\partial Az}{\partial x} + Ay\frac{\partial Az}{\partial y} + Az\frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A^2x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A^2y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A^2z\right)\right]$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial Az}{\partial y} - \dfrac{\partial Ay}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Ax}{\partial z} - \dfrac{\partial Az}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Ay}{\partial x} - \dfrac{\partial Ax}{\partial y} \end{array} \right.$$

Ta phân biệt các lực trên đơn vị khối lượng và tương đương của lực khối lượng chỉ do các áp suất, khi đó ta có thể viết : $\vec{f}_{m\text{ ,toàn bộ}} = \vec{f}_m - \dfrac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}$

Vậy ta nhận được phương trình Ở le:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}$$

hay:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}$$

Đối với tọa độ đề các:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = f_{x,m} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = f_{y,m} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = f_{Z,m} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}\right) \end{cases}$$

2/ Tích phân phương trình Ở le: (chiều dài của 1 đường dòng)

Ta sử dụng Phương trình Ở le theo dạng sau:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P$$

nhân vô hướng $d\vec{l}$: phân tố của đường dòng $d\vec{l} \,//\, \vec{v}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.d\vec{l} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)d\vec{l} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right).d\vec{l} = \left[\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{gradP}}{\rho}\right].d\vec{l}$$

ta $2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right).d\vec{l} = \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right) \perp \vec{v} \,//\, d\vec{l}$

nên $2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right).d\vec{l} = 0$

Thông thường lực khối: $\vec{f}_m = -\overrightarrow{grad}e_{Pm}$ (e_{pm} gọi là thế năng)

Đối với trường trọng lực: $\vec{f}_m = \vec{g}$

$\vec{f}_m = -\overrightarrow{grad}(gz)$ và $e_{pm} = gz$

Ta có: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.d\vec{l} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm}\right).d\vec{l} + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{gradP}.d\vec{l} = 0$

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}.d\vec{l} + \left[e_{pm}(M,t) + \frac{v^2(M,t)}{2}\right]_A^B + \int_A^B \frac{\overrightarrow{gradP}(M,t)}{\rho(M,t)}.d\vec{l} = 0$$

Đây là tích phân phương trình Ơ le theo chiều dài đường dòng.

Ví dụ áp dụng 3.

§3.Các phương trình Bernoulli (Benuli)

1.Tồn tại thế năng liên kết với lực thể tích.

Từ phương trình Ơ le nhân vô hướng $d\vec{l}$ (phân tố chiều dài nào đó)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.d\vec{l} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right).d\vec{l} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right).d\vec{l} = \left[\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{gradP}}{\rho}\right].d\vec{l}$$

Nếu $\vec{f}_m = -\overrightarrow{grad}\left(e_{pm}\right)$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm}\right) + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right) + \frac{\overrightarrow{gradP}}{\rho}\right].d\vec{l} = 0$$

2.Chất lưu đồng chất không chịu nén hay dòng chảy barôtrôp.

a. Chất lưu không chịu nén.

Ta có $\rho = \text{const}$ nên $\overrightarrow{\text{grad}}P = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right)$

b.Dòng chảy Barôtrôp của chấtlưu: nếu $\rho = \rho(P)$

Thì tồn tạihàm số $\varphi(P) = \int_{P_0}^{P} \frac{du}{\rho(u)}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(P) = \frac{d\varphi}{dP}.\overrightarrow{\text{grad}}P$ và $\frac{d\varphi(P)}{dP} = \frac{1}{\rho(P)}$ nên $\frac{grad\vec{P}}{\rho} = grad\vec{d}\varphi(P)$

Vậy: $\vec{f}_m = -\frac{\overrightarrow{gradP}}{\rho} = -\overrightarrow{grad}[\varphi(P)]$

Vậy đối với chất lưu không chịu nén.

$$\left[\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\rho}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right].d\vec{l} = 0 \qquad (1)$$

Đối với chất lưu Barôtrốp.

$$\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P)\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right].d\vec{l} = 0 \qquad (2)$$

c. Các trường hợp riêng

***Dòng chảy dừng**: $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$ và $d\vec{l} \,//\, \vec{v}$ (vì quĩ đạo $\equiv$đường dòng)

$$(1) \Rightarrow \left[\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\rho}\right]_A^B = 0 \qquad (1')$$

$$(2) \Rightarrow \left[\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P)\right]_A^B = 0 \qquad (2')$$

*Dòng chảy không xoáy**: $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 0$

vì $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 0; \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial t}$

Từ phương trình Ơ le (2) đối với dòng chảy barôtrốp

$\left[\frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P)\right] = \text{const}$ $(3^/)$ ở thời gian t cho toàn bộ chất lưu

Đối với dòng chảy không xoáy và dừng của chất lưu không chịu nén.

$(3^/) \Rightarrow \left[\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P)\right] = \text{const}$ (4) ở bất kỳ thời điểm t trong toàn bộ chất lưu

ví dụ 3 trang 105 và ví dụ 4 trang 109.

Cho chất lưu không chịu nén chứa trong 2 nhánh của ống hình chữ U với tiết diện ρ. Chiều dài tổng cộng của chất lưu trong ống là L. Ở trạng thái cân bằng mức nước ở 2 nhánh ống bằng nhau. Hãy xác định chu kỳ dao động của chất lưu trong ống.

Giải.

Tích phân phương trình Ơ le:

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}.d\vec{l} + \left[e(M,t) + \frac{v^2(M,t)}{2}\right]_A^B + \int_A^B \frac{\overrightarrow{\text{grad}P(M,t)}}{\rho(M,tt)}.d\vec{l} = 0$$

(x)

vì $\vec{v}(M,t) = \dot{z}(t)\vec{T}$

1) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.d\vec{l} = \ddot{z}\vec{T}.d\vec{l}$ (vì $d\vec{l} = dS\vec{T}$) $\Rightarrow = \ddot{z}dS$

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}.d\vec{l} = \ddot{z}\int_A^B dS = \ddot{z}L$$

2) $e(M,t)\Big|_A^B = (gz)_A^B = 2gz$

$$\left[\frac{v^2(M,t)}{2}\right]_A^B = 0$$

3) $\displaystyle\int_A^B \frac{\overrightarrow{gradL}}{\rho}.d\vec{l} = \frac{1}{\rho}\int_A^B \overrightarrow{gradP}.d\vec{l} = \frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = 0$

(x) $\Rightarrow \ddot{Z}L + 2gz = 0 \Rightarrow k^2 = \dfrac{2g}{L}$

Vậy chu kỳ: $T = \dfrac{2\pi}{K} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2g}}$

Bài tập:

1.Cho dòng chảy theo L

$$\begin{cases} X(t) = X_0(1+bt) \\ Y(t) = Y_0 \end{cases} \text{(b=const}$$

Tìm gia tốc của hạt trực tiếp và theo Ở le.

Giải.

$$\vec{V}(\vec{R}(t),t) = \vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}; \vec{R}(t) = X(t)\vec{e}_x + Y(t)\vec{e}_y$$

Vậy $\vec{V}(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}\vec{e}_x + \dfrac{dY(t)}{dt}\vec{e}_y = X_0 b\vec{e}_x$ (vì $\dfrac{dY(t)}{dt} = 0$)

Hay $\vec{V}(\vec{R}(t),t) = X_0 b\vec{e}_x = \dfrac{X(t)}{1+bt}b\vec{e}_x$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = 0 \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = 0 \end{aligned} \quad \text{hay } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

Theo Ở le: $\vec{v}(\vec{r}(t),t) = \dfrac{x(t)}{1+bt}b\vec{e}_x$

Theo công thức $\vec{a}(t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad}\vec{v}$

vì $\vec{v}$ theo $\vec{e}_x$ nên:

$$a(t) = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{xk}{1+\varepsilon t}\right)}{\partial t} + \frac{xb}{(1+bt)}.\frac{\partial\left(\frac{xb}{1+bt}\right)}{\partial x}$$

$$= -\frac{xb^2}{(1+bt)^2} + \frac{xb}{(1+bt)}.\frac{b}{(1+bt)} = 0$$

2.Cho trường vận tốc: $\vec{v} = u_0\vec{e}_x + (-gt + v_0)\vec{e}_z$

$$v_x = u_0$$

$$v_Z = -gt + v_0$$

Phương trình quĩ đạo: $\frac{dX}{u_0} = \frac{dZ}{-gt + v_0} = dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t) = u_0 t + X_0 \\ Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + Z_0 \end{cases}$$

Khử t $\Rightarrow t = \frac{X(t) - X_0}{u_0}$:

$$Z(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{X(t) - X_0}{u_0}\right)^2 + v_0\frac{X - X_0}{u_0} + Z_0$$

Phương trình parabol.

Phương trình đưởng dòng : $\frac{dx}{u_0} = \frac{dZ}{-gt + v_0}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-gt + v_0}{u_0}; \frac{dx}{u_0} - \frac{dz}{gt + v_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{u_0} - \frac{z}{-gt + v_0} = const$$

$Z = \dfrac{-gt + v_0}{u_0} x + const$ là đường thẳng

với góc nghiêng: $tg\alpha = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-gt + v_0}{u_0}$

Còn đường phát xạ không biến động, nó giữ nguyên tại mọi thời gian t. Nó được cấu tạo đường parabol xuất phát từ điểm (0,0).

3.Ta có dòng chảy qua mặt y=0 và mặt ∞ do dao động của mặt y=0: $X = a\sin\omega t$ với trường vận tốc:

$$\vec{v}(x, y, t) = a\omega\cos(\omega t - ky)e^{-ky}\vec{e}_x = v(y, t)\vec{e}_x$$

Tìm gia tốc của hạt chất lưu:

Đối với y = 0. $\vec{v}(x, y, t) = a\omega\cos\omega t\vec{e}_x = \dfrac{dX}{dt}\vec{e}_x$

Như vậy vận tốc của hạt khi y = 0 bằng vận tốc của một dao động.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = -a\omega^2\sin(\omega t - ky)e^{-ky}\vec{e}_x$$

$$+ v(y, t)\frac{\partial v(y, t)\vec{e}_x}{\partial x} + 0.\frac{\partial v(y, t)\vec{e}_x}{\partial y} = 0$$

Vậy $\vec{a} = -a\omega^2 e^{-ky}\sin(\omega t - ky)\vec{e}_x$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$